III−90 間隙率および間隙水圧の伝播に関する一考察

東大土木教室　石原研而

静的な圧密に相当する変形が動的に起った場合，間隙率や間隙水圧がいかなる法則に従って伝播して行くかを検討してみる。これは地震時の地盤の振動特性等を知るのに役立つものと思われる。文献[1]の論文と同じ記号を用いることにすると，運動方程式，連続方程式，エネルギー表現式は次のようになる。

$$\rho^s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} + b(\dot{v}_i - \dot{u}_i), \qquad \rho^w \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = -p_{,i} - b(\dot{v}_i - \dot{u}_i) \quad \cdots\cdots (1) \quad (\text{運動方程式})$$

$$\frac{\partial \rho^s}{\partial t} = -\rho^s \dot{u}_{i,i}, \qquad \frac{\partial \rho^w}{\partial t} = -\rho^w \dot{v}_{i,i} \quad \cdots\cdots (2) \quad (\text{連続方程式})$$

$$du' = \sigma\, de - p\, d\epsilon + \tau_{ij}\, d\gamma_{ij} \quad \cdots\cdots (4) \quad (\text{内部エネルギーの表現式})$$

ただし，(1),(2)式の最初の式は土粒子骨格の bulk properties に関する方程式であり，最後の式は水をbulkに観察した場合の式である。さて，ρ_{st}, ρ_{wt} をそれぞれ土および水の単位容積真重量であるとすれば，$\rho^s = (1-n)\rho_{st}$, $\rho^w = n\rho_{wt}$ （n：間隙率）なる関係があるから，これを(2)式に代入して，微小項を省略すると，

$$de = \frac{dn}{1-n} + de_s, \qquad d\epsilon = -\frac{dn}{n} + d\epsilon_w \quad \cdots\cdots (5)$$

がえられる。ただし $de_s = d\rho_{st}/\rho_{st}$, $d\epsilon_w = d\rho_{wt}/\rho_{wt}$ と置くとする。(5)式を(4)式に代入すると

$$du' = (\sigma - p + p/n)\frac{dn}{1-n} + \sigma\, de_s - p\, d\epsilon_w + \tau_{ij}\, d\gamma_{ij} \quad \cdots\cdots (6)$$

なる関係式がえられる。σは土粒子の部分に加わる単位面積当りの力であり，pは水の部分に加わる力であるから$\sigma - p$は単位断面に加わる全体の力である。一方，p/nは水圧であるから$\sigma - p + p/n$は有効応力を表わすことになる。結局，(6)式右辺の第一項は有効応力による間隙率の変化にもとずく系の内部エネルギー増加を表わすことになる。第二項は土粒子自体の変形によるエネルギー増加，第三項は水自体の圧縮によるエネルギー増加に相当する。今，通常の圧密理論にならって土粒子と水は非圧縮性であると仮定すると(6)式は

$$du' = (\sigma - p + p/n)\frac{dn}{1-n} + \tau_{ij}\, d\gamma_{ij} \quad \cdots\cdots (7)$$

となる。次に応力－歪の関係を(7)式の全微分を満たすように決めてやると，

$$\sigma - p + p/n = \alpha_s e, \qquad \tau_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} \qquad \left(e = \frac{n-n_0}{1-n_0}\right) \quad \cdots\cdots (8)$$

となる。(8)式を普通の圧密試験の状態と同じ一軸圧縮の表現に書き直し，α_s, μと体積変形係数m_vの関係を求めると，$m_v = 1/(\alpha_s + \frac{4}{3}\mu)$ となる。次に(1)式のbと透水係数kとの関係を示すと，$b = n^2\rho_{wt}g/k$ となる。これらの，よく知られた常数を用いて(1)式を書き直すと，結局，圧縮変形に対して，

$$(1-n)\rho_{st}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \frac{1}{m_v}\nabla^2 e + \frac{n-1}{n}\nabla^2 p - \frac{b}{n}\frac{\partial e}{\partial t} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\nabla^2 p = \frac{b}{n}\frac{\partial e}{\partial t} + (1-n)\rho_{wt}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad \cdots\cdots (10)$$

なる表現式がえられる。これは間隙水圧p/nと間隙率nとがみたすべき基本方程式である。(9),(10)の解の特性を調べるために，

$$e = A_e e^{i(lx+\omega t)}, \qquad p = A_p e^{i(lx+\omega t)} \quad \cdots\cdots (11)$$

とおいて(9),(10)に代入してやると1次元的な伝播（x－方向）に対して次のような frequency equation

がえられる。
$$\left(\frac{\ell}{\omega}\right)^2+\frac{b\,m_v}{n^2}\frac{1}{\omega}i-(1-n)\left(\rho_{st}+\frac{1-n}{n}\rho_{wt}\right)m_v=0 \quad \cdots\cdots (12)$$

この方程式を解くために，$\frac{\ell}{\omega}=X_r+iX_m$，$\left(\frac{\ell}{\omega}\right)^2=X_r^2-X_m^2+2iX_rX_m$とおいて(12)に代入してやると，
$$X_r^2-X_m^2=1/V_c^2,\qquad 2X_rX_m=-\frac{1}{V_c^2}\frac{\omega^*}{\omega} \quad \cdots\cdots (13)$$
がえられる。ただし，
$$V_c^2=\frac{1}{m_v(1-n)\left(\rho_{st}+\frac{1-n}{n}\rho_{wt}\right)},\qquad \omega^*=\frac{b}{n^2(1-n)\left(\rho_{st}+\frac{1-n}{n}\rho_{wt}\right)} \quad \cdots\cdots (14)$$

とする。V_cは弾性力と慣性力の比を表わし$b=0$の場合の圧縮波の伝播速度を表わす。ω^*は粘性と慣性の比を表わし以下"特性角振動数"と呼ぶことにする。$b\neq 0$の場合の伝播速度をV_pとするとV_pは次のようになる。 (13)式をといて $V_p=1/X_r$とおいて
$$V_p/V_c=2\left[1+\sqrt{1+\omega^*/\omega}\right]^{-\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots (15)$$

(15)式を次の2つの場合にわけて更に吟味してみる。

(i) $\omega \gg \omega^*$ の時 （振動数が特性角振動数よりはるかに大きい場合）
$$V_p/V_c \approx 1-\frac{1}{8}\left(\frac{\omega^*}{\omega}\right)+\cdots \quad \cdots (16)$$
これより，入力振動数ωがω^*より非常に大きくなると透水係数によって生ずるdamping効果が小さくなってV_pがV_cの値に近ずくことが知れる。

(ii) $\omega \ll \omega^*$ の時 （振動数が特性角振動数よりはるかに小さい場合）
$$V_p/V_c \approx \sqrt{2\omega/\omega^*} \quad \cdots\cdots (17)$$
ωが小さくなると，圧縮波の伝わる速度が小さくなり，eやpの値は波動として伝わらなくなり，拡散型の伝播方式を取ることになると云える。つまり，慣性の影響が小さくなり，damping の効果が強く今までの圧密方程式と同じ解がえられることになる。　実際の土が(i)と(ii)のどちらの場合に相当するかを見るために4種類の代表的な土に対してω^*とV_cの値を計算してみると表Iのようになる。

表I　各種の土のω^*とV_cの値

材料	透水係数	間隙率	体積圧縮率 m_v	ω^*の値	V_cの値
締った砂	10^{-2} (cm/sec.)	0.2	$1{,}800\times10^{-6}$ / (kg/cm²)	1.9×10^{4}/sec.	103 m/sec.
ゆるい砂	10^{-1}	0.4	$9{,}000\times10^{-6}$	0.43×10^{4}	68.5
粘土(軟)	1.0×10^{-6}	0.02	$50{,}000\times10^{-6}$	1950×10^{4}	6.0
粘土(剛)	1.0×10^{-5}	0.02	$120{,}000\times10^{-6}$	195×10^{4}	4.0

ただし，$\rho_{wt}g=1\,\mathrm{g/cm^3}$，$\rho_{st}g=2.4\,\mathrm{g/cm^3}$ と仮定した。

この表からわかるように通常の土では透水係数が小さいためにω^*が非常に大きな値となり，実際の地震時のωの値が10～50位であることを考えると(i)の場合はほとんどおこりえず(ii)の場合のみが実際的意味をもつことになる。すなわち，間隙率の変化を伴なうような波動は圧縮波として存在しえないで，間隙率，間隙水圧は，静的な圧密と同じ法則に従って変化伝播して行くと考えてよかろう。このことより，地震時の地下水のふきだしが地震開始以後数分たってから生ずることなどが説明できるように思える。ここではふれていないが剪断波については以上のことは当てはまらず，波として伝播しうることが示される。

(1) K. Ishihara : "Theory of Consolidation of a Porous Material with Heat Effect Based on the Irreversible Thermodynamics"，土木学会論文集 No. 113. (1965)