Ⅲ―82

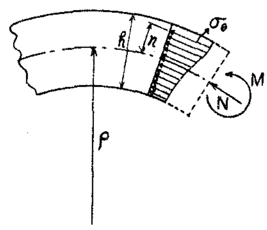
埋設管における応力と土圧の関係について

東北大学　正員　佐武正雄
東北大学　学生員○佐藤紘志

1．まえがき

埋設管（円管）の応力から土圧を逆算することはしばしば必要となるが，従来の方法は等分布荷重，三角分布荷重などを組み合わせたものを仮定して，土圧を計算している．しかし側圧などは簡単な直線分布にはならないことが多いように思われ，また偏圧を受けるような場合もあるので，本文では，Fourier 級数を応用し土圧を求めるより一般的な方法について述べる．なお，ここでは平面歪の状態を考え，軸方向の曲げなどについては考えていない．

2．解析方法



図―1

まず，円管内の応力 σ_θ は

$$\sigma_\theta = \frac{N}{h} + \left(\frac{1}{h\rho} + \frac{\eta}{\rho+\eta} \cdot \frac{1}{\int_{A} \frac{\eta^2}{\rho+\eta} dA} \right) M \quad (1)$$

で与えられ，[1] これを用いて仮想仕事の式を求めれば

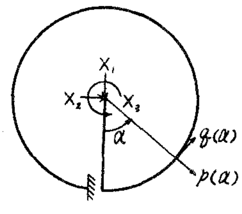
$$W = \rho \left[P\int_0^{2\pi} N \cdot \bar{N}\, d\theta + R\int_0^{2\pi} M \cdot \bar{M}\, d\theta \right] \quad (2)$$

ただし，

$$P = \frac{1}{Eh}, \quad R = \frac{1}{E}\left\{ \frac{h + \frac{\rho^2 h}{\rho^2 - \frac{1}{4}h^2} - 2\rho \log \frac{\rho + \frac{1}{2}h}{\rho - \frac{1}{2}h}}{\rho^2 \left(h - \rho \log \frac{\rho + \frac{1}{2}h}{\rho - \frac{1}{2}h} \right)^2} - \frac{1}{h\rho^2} \right\} \quad (3)$$

となる．ここに，E は見かけのヤング率，$h \ll \rho$ の場合は $R \longrightarrow 1/EI = 12/Eh^3$ となる．

次に，荷重としては，任意の分布荷重を考え，これを中心方向荷重 $p(\alpha)$，接線方向荷重 $q(\alpha)$ とに分け次のようにおく．



図―2

$$\left. \begin{aligned} p(\alpha) &= a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos n\alpha + \sum_{n=1} b_n \sin n\alpha \\ q(\alpha) &= c_0 + \sum_{n=1} c_n \cos n\alpha + \sum_{n=1} d_n \sin n\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

この場合，a_0 は静水圧，c_0 は回転を与えるような一様な接線力，を示しており，a_1，b_1，c_0，c_1，d_1 の項は平衡していないので相当する反力を生ずることになる。図示のように不静定力をとって計算をすすめれば，$p(\alpha)$ と $q(\alpha)$

表―1

$K = P/(P + \rho^2 R)$

	$p(\alpha)$ によるもの	$q(\alpha)$ によるもの
N/ρ	$a_0 - \frac{1}{2}a_1 + \sum_{n=2} \frac{1}{n^2-1}(a_1 - a_n)\cos n\theta$ $+ \sum_{n=2} \frac{1}{n^2-1}(nb_1 - b_n)\sin n\theta$	$-\frac{1}{2}d_1 - (1-K)d_1 \cos\theta + (1-K)(-2c_0 + c_1)\sin\theta$ $+ \sum_{n=2} \frac{1}{n^2-1}(d_1 - nd_n)\cos n\theta$ $+ \sum_{n=2} \frac{n}{n^2-1}(-c_1 + c_n)\sin n\theta$
M/ρ^2	$\sum_{n=2} \frac{1}{n^2-1}(-a_1 + a_n)\cos n\theta$ $+ \sum_{n=2} \frac{1}{n^2-1}(-nb_1 + b_n)\sin n\theta$	$-Kd_1\cos\theta + K(-2c_0 + c_1)\sin\theta$ $+ \sum_{n=2} \frac{1}{n^2-1}(-d_1 + \frac{1}{n}d_n)\cos n\theta$ $+ \sum_{n=2} \frac{1}{n^2-1}(nc_1 - \frac{1}{n}c_n)\sin n\theta$

による軸力N，曲げモーメントMが表－1に示すように求まる。

一方，円管の内縁，外縁で歪を測定すれば，(1)式を用いて，その点のN，Mが求められるから，何箇所かの点で，N，Mを求め，これを次のような有限Fourier級数に展開する。

$$\left.\begin{aligned} N &= A_0 + \sum_{n=1} A_n \cos n\theta + \sum_{n=1} B_n \sin n\theta \\ M &= C_0 + \sum_{n=1} C_n \cos n\theta + \sum_{n=1} D_n \sin n\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(5)式の係数を表－1の係数と比較すれば，次のような関係が得られる。

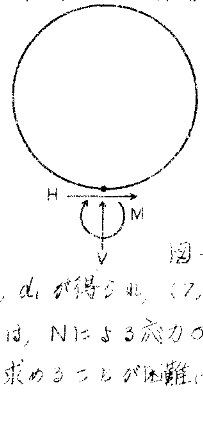
$$\left.\begin{aligned} & A_0 = \rho\left\{a_0 - \frac{1}{2}(a_1 + d_1)\right\}, \qquad C_0 = 0 \\ & \frac{A_1}{\rho(1-K)} = \frac{C_1}{\rho^2 K} = -d_1 \\ & \frac{B_1}{\rho(1-K)} = \frac{D_1}{\rho^2 K} = -2c_0 + c_1 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{\rho}{n^2-1}\{-a_n - n d_n + (a_1 + d_1)\} \\ B_n &= \frac{\rho}{n^2-1}\{-b_n + n c_n + n(b_1 - c_1)\} \\ C_n &= \frac{\rho^2}{n^2-1}\left\{a_n + \frac{1}{n} d_n - (a_1 + d_1)\right\} \\ D_n &= \frac{\rho^2}{n^2-1}\left\{b_n - \frac{1}{n} c_n - n(b_1 - c_1)\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

これから，次のようなことがらが分かる。

まず，C_0で示される一様な曲げモーメントは初期応力として任意の大きさではいり得，また，静水圧による変形によって2次的に生ずるが，p，qのような外部からの荷重によっては生じない。次に，A_1とC_1，B_1とD_1とは(6)式に示すような比例関係を持たねばならない。そのためa_0，a_1などを決定すべき方程式が不足することになるが，前述したように，これらの項は力の平衡していない項に相当しているので，それによる反力

$$\left.\begin{aligned} H &= \rho\pi(b_1 - c_1) \\ V &= -\rho\pi(a_1 + d_1) \\ M &= \rho^2\pi(b_1 + 2c_0 - c_1) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$



図－3

を用いれば，方程式の不足を補うことができる。すなわち，このような解析方法では，最下点の集中反力を知る必要がある。もし，このような反力が存在しなければ，0とおけばよい。(6)，(8)式よりa_0，a_1，b_1，c_0，c_1，d_1が得られ，(7)式より，a_n，b_n，c_n，d_nが得られることになる。実際問題として $h \ll \rho$ の場合には，Nによる応力σ_NとMによる応力σ_Mとすれば，σ_N/σ_Mは$h/6\rho$の程度に小さくなるので，(5)式のNを求めることが困難になり，この場合，解はA_n，B_nだけ不定になる。

3．あとがき　Fourier級数を用いて，埋設管の応力から土圧を計算する一般的方法について述べた。同様にすれば，変形との関係を求めることもできる。

参考文献　1) 山口　応用力学　P．151