II—91 開口部を有する楕円形湾の波浪性状について

神戸大学工学部 正員 杉本修一

湾の入口から波が入ってくる場合，その波がどのようにして入ってゆくかということは港を考えるうえに，大変重要なことである。このような問題を考えるとき，まず頭に浮ぶことは Huyghens' principle であろう。吾々はこの principle によって解かれた秀れた幾つかの例を知っている。

しかし，ここで述べたいと思う方法は，波動方程式を解析的に解き，楕円形湾の開口部より入ってくる波の性状を調べてみようとするものである。

長波については静水面よりの水位上昇を ζ とすれば

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = gd\,\nabla^2\zeta, \qquad (\text{茲に } d \text{ は等深})$$

が成立する。さらに $\zeta=\phi\cdot e^{i\sigma t}$ として楕円座標 $x+iy=c\cdot\cosh(\xi+i\eta)$ を用うれば

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\sigma^2c^2}{2gd}(\cosh 2\xi-\cos 2\eta)\phi=0. \qquad (1)$$

となる。そこで $\phi=F(\xi)\cdot G(\eta)$ であるとすれば上式は変数分離ができて

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}-(A-2q\cosh 2\xi)F=0. \quad \cdots\cdots(2), \qquad \frac{d^2G}{d\eta^2}+(A-2q\cos 2\eta)G=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

この式(3)は Mathieu の方程式と呼ばれているもので，この式は π または 2π の周期をもつ関数で Mathieu 関数と称えられているものである。したがって式(3)の解は

$$G(\eta)=A_0+\sum_{s=1}^{\infty}A_s\cos s\eta+\sum_{s=1}^{\infty}B_s\sin s\eta. \qquad (4)$$

の型で表示することができる。式(2)はよく知られているように双曲線関数で表示することができる。

$$F(\xi)=C_0+\sum_{j=1}^{\infty}C_j\cosh j\xi+\sum_{j=1}^{\infty}D_j\sinh j\xi. \qquad (5)$$

入射波の方向が長軸に対して $+\theta$ だけ傾いているとすれば無限前方における入射波の波動関数 ϕ_1 は

$$\phi_1=\mathcal{R}_e\cdot\exp\left[ikc(\cosh\xi\cos\eta\cos\theta+\sinh\xi\sin\eta\sin\theta)\right].$$

茲に $\mathcal{R}_e$ は実部を表示する (6)

湾の周辺においては $\partial\phi/\partial\xi=0$ であるが，開口部においては波が入ってくるので，この部分においては入射波を ξ で微分したものであると仮定する。周辺に相当する ξ を ξ_0 として，この上で

$$0<\eta<\eta_1,\ \left[\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right]=0. \qquad \eta_1<\eta<\eta_2,\ \left[\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right]=\left[\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}\right]. \qquad \eta_2<\eta<2\pi,\ \left[\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right]=0. \qquad (7)$$

これらの境界条件を満足するような解を求むればよいわけである。そこで解の型として次式を仮定。

$$\phi=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{ij}\,\mathrm{ch}\,i\xi\cos j\eta+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}B_{st}\,\mathrm{sh}\,s\xi\sin t\eta. \qquad (8)$$

変分学によれば

$$\frac{d}{dx}\left\{P(x)\frac{dy}{dx}\right\}+Q(x)y=0.$$

なる方程式を解くことは

$$I(y)=\int\left\{P(x)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-Q(x)\cdot y^2\right\}dx=\min.$$

すなわち

$$I=\iint\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2-q(\mathrm{ch}2\xi-\cos2\eta)\psi^2\right]d\xi d\eta=\min. \tag{9}$$

となるごとき関数を求むることと同等であることを教えている。

そこで式(8)を式(9)に代入して，$\partial I/\partial A_{ij}=0$，$\partial I/\partial B_{st}=0$ を計算して，$i\times j+s\times t$ 個の聯立方程式より A_{ij} および B_{st} を消去すれば q の値を求むることができる。

ところで，式(8)において，双曲線関数は単調に増加する関数であることに着目して，式(8)を

$$\psi=(A_{00}+A_{01}\mathrm{ch}\xi)+(A_{10}+A_{11}\mathrm{ch}\xi)\cos\eta+(A_{20}+A_{21}\mathrm{ch}\xi)\cos2\eta+(A_{30}+A_{31}\mathrm{ch}\xi)\cos3\eta+\cdots$$
$$+B_{11}\mathrm{sh}\xi\sin\eta+B_{21}\mathrm{sh}\xi\sin2\eta+B_{31}\mathrm{sh}\xi\sin3\eta+\cdots\cdots \tag{10}$$

式(10)のように簡単化する。

一方，境界条件(7)を満足するように η が $0\sim2\pi$ の間で Fourier 級数に展開すれば

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_{\xi_0}=\sum_{j=0}^{\infty}H_j\cos j\eta+\sum_{t=0}^{\infty}K_t\sin t\eta. \tag{11}$$

をうる。式(10)より $\xi=\xi_0$ の周辺における $\partial\psi/\partial\xi$ を求むれば

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_{\xi=\xi_0}=A_{01}\mathrm{sh}\xi_0+A_{11}\mathrm{sh}\xi_0\cos\eta+A_{21}\mathrm{sh}\xi_0\cos2\eta+A_{31}\mathrm{sh}\xi_0\cos3\eta+\cdots\cdots$$
$$+B_{11}\mathrm{ch}\xi_0\sin\eta+B_{21}\mathrm{ch}\xi_0\sin2\eta+B_{31}\mathrm{ch}\xi_0\sin3\eta+\cdots\cdots \tag{12}$$

この式(11)および(12)を并置してそれぞれの係数を等しいと置けば，A_{ij} および B_{s1} は

$$A_{01}=\frac{H_0}{\mathrm{sh}\xi_0},\quad A_{11}=\frac{H_1}{\mathrm{sh}\xi_0},\ \cdots\cdots\qquad B_{11}=\frac{K_1}{\mathrm{ch}\xi_0},\quad B_{21}=\frac{K_2}{\mathrm{ch}\xi_0},\cdots\cdots \tag{13}$$

として求むることができる。

式(10)の係数をみてみると，$\cos j\eta$ の係数には A_{i0} と A_{i1} の2つの係数を含んでいる。そのうち A_{i1} については式(13)より求むることができるが，まだ，係数 A_{i0} の決定が残っている。この A_{i0} は，式(13)を式(10)に代入して，さらにこれを式(9)に代入して，その値が min になるように係数 A_{i0} で微分し

$$\frac{\partial I}{\partial A_{i0}}=0 \tag{14}$$

になるようにし，i 個の聯立方程式を作り，これより A_{i0} を求むればよい。