

京都大学防災研究所 正員 工博 岩垣雄一

京都大学大学院 学生員 細見昌彦

1 緒言 1895年 Korteweg-de Vries により発見されたフノイド波は、数学的取扱いは Jacobi の椭圆関数 cn やその母数 k , 第1種および第2種の完全椭圆積分および E を含むため、そのままの形で波の特性を把握することは難かしく、われわれ技術者にとってあまりなじみ深いものではない。そこで通常の波の計算と同様、この研究では波高、水深および周期を与えて、フノイド波の諸特性を求めることができるようフノイド波の理論の結果にもとづいて図表を作成し、Stokes波および微小振幅波との比較を試み、さらに波形、波速および波長について若干の実験を行なった。なおフノイド波の理論としては摂動法によって求めた Laitone の理論解を用いた。

2 Laitone によるフノイド波の理論解: いま h_0 を波の谷からの水深, h を平均水深, η を波の谷から水面までの距離, δ を波の谷から平均水面までの距離, 波高を H , 波速を C , 波長を L , 圧力を p , x 軸は波の谷を通過して水平方向, z 軸は鉛直上向きにとり, それぞれの速度成分をそれぞれ u および w とすると, 第2近似解は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{h_0} &= \frac{H}{h_0} cn^2(2\pi \frac{x-Ct}{L}, k) - \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h_0}\right)^2 cn^2(2\pi \frac{x-Ct}{L}, k) \left\{ 1 - cn^2(2\pi \frac{x-Ct}{L}, k) \right\} \quad (1) \quad \frac{C}{\sqrt{gh_0}} = 1 + \frac{H}{h_0} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) \\ &+ \left(\frac{H}{h_0} \right)^2 \frac{1}{k^4} \left\{ \frac{E}{K} \left(\frac{E}{K} + \frac{3}{4} k^2 - 1 \right) - \left(\frac{k^2 + 14k^2 - 9}{40} \right) \right\} \quad (2) \quad \frac{p}{\rho gh_0} = \frac{H}{h_0} \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) + \left(\frac{H}{h_0} \right)^2 \frac{1}{2k^4} \left\{ 2 - 11k^2 + 3k^4 - (8-7k^2) \right. \\ &\times \left. \frac{E}{K} \right\} \quad (3) \quad \frac{u}{\sqrt{gh_0}} = \frac{\eta}{h_0} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) + \left(\frac{H}{h_0} \right)^2 \frac{1}{k^4} \left\{ \frac{E}{K} \left(\frac{E}{K} + \frac{3}{4} k^2 - 1 \right) - \left(\frac{k^2 + 14k^2 - 9}{40} \right) \right\} - \left[1 + \left(1 - \frac{1}{2k^2} \right) \frac{H}{h_0} - \left(\frac{21k^4 - 4k^2 - 9}{40k^4} \right) \left(\frac{H}{h_0} \right)^2 \right. \\ &- \left. \frac{\eta}{h_0} \left\{ 1 - \frac{H}{h_0} \left(\frac{7k^2 - 2}{4k^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{H}{h_0} \left(2 - \frac{1}{k^2} \right) \left(\frac{2}{h_0} + \frac{E}{h_0 K} \right) \right\} - \left(\frac{\eta}{h_0} \right)^2 \left\{ \frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left(\frac{2}{h_0} + \frac{E}{h_0 K} \right) \right\} + \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h_0} \right)^2 \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) \left(\frac{2}{h_0} + \frac{E}{h_0 K} \right) \right] \quad (4) \\ \frac{w}{\sqrt{gh_0}} &= - \left[\left(1 + \frac{H}{h_0} \right) \left(\frac{3}{2} \frac{H}{h_0} \right)^{1/2} cn(2\pi \frac{x-Ct}{L}, k) sn(2\pi \frac{x-Ct}{L}, k) dn(2\pi \frac{x-Ct}{L}, k) \times \left\{ 1 - \frac{H}{h_0} \left(\frac{1+k^2}{2k^2} \right) - \frac{H}{h_0} \left(1 - \frac{1}{2k^2} \right) \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\frac{2}{h_0} + \frac{E}{h_0 K} \right) - \frac{1}{2} \frac{\eta}{h_0} \left(1 - 6 \frac{E}{h_0 K} - 3 \frac{E^2}{h_0^2 K^2} \right) \right\} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

== には, suffix 1 および 2 はそれぞれ第1近似と第2近似をあらわす。

3 波形および波速に関する実験: 実験は幅50cm, 深さ65cm, 長さ63mの鋭鋭水槽の一端にピストン式造波機とフィルターをとりつけ, 一定の距離を隔てた二つの波高計を用いて, 波が二つの波高計の間を進むに要する時間と水位記録から読みとり波速を算出した。また波長の測定方法としては, 二つの波高計のうちの一つの固定し, 他の一つの水路に沿って1cmずつ前後に移動させ, 相隣れる波の峯の位置がちょうど二つの波高計間の距離に一致する点を水位記録から求め, このときの二つの波高計間の距離をもって波長とした。図-1は(1)式から求めたフノイド波の第2近似の波形と実験値との比較の一例を示す。なおこの図では横軸に x/L のかわりに時間と周期との比 t/T がとってあり, 比較のために Stokes波および微小振幅波の波形をも与えてある。実験値はフノイド波の第2近似値とよく一致している。とくに, この図には Stokes波 (Skjelbreia の 3rd order のもの) の収束性が悪いことがあらわされている。図-2は波速に関する実験値と各波動理論による理論値との比較を示すものである。 $H/h > 3$ の範囲では Stokes波理論とフノイド波理論との差はわずかであり, 実験誤差の範囲に含まれる明確なことは言えないが, $2 < H/h < 3$ の範囲では

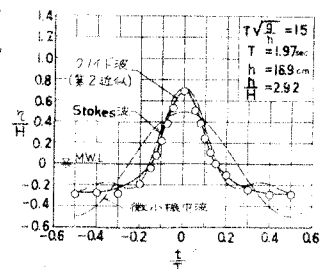


図-1 波形の比較

実験値はフノイド波理論によく一致していることが分る。また図-3は、図-2と同様を比較を波長に換して行なったものである。実験値と理論値の関係は波速の場合とよく似ている。これは $L=CT$ の南原からいって当然であるといえる。図-4は同じ実験条件の場合について波の谷から平均水面までの距離 δ と波高 H との比 δ/H の比較を行なったものである。実験値のうちで理論値との差異が大きいものは、波形が波の谷の印方で歪んでいることを意味しており、この傾向は図-2および図-3における実験値のバラツキの傾向とほぼ似かよっているように思われる。なお同図にはStokes波に対する理論曲線が与えられていないが、これは $T/\sqrt{gH}$ の値が大きくなり、 δ/H の値が小さくなるとStokes波の収束性が悪くなり、波の谷の印方でもう一つの大きな峯ができて、波の谷を定義することが無意味となるためである。

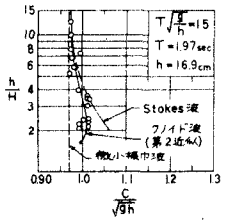


図-2 波速の比較

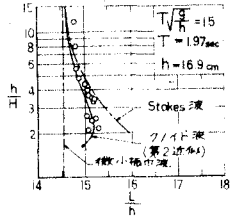


図-3 波長の比較

4 圧力に関する理論値の比較: 図-5は海底における圧力について第2近似の圧力とStokes波理論および微小振幅波理論によるものとの比較を $\delta=0.05$, $\delta=0.01$ の場合について示したものである。なお縦軸には海底における圧力から平均水深に対する静水圧を引いたいわゆる圧力変動 ΔP_0 がとってある。微小振幅波理論による曲線は他の理論曲線と明確にはなされているが、それ以外の理論曲線はほぼ等しく、とくに波の谷の印方ではよく一致している。しかしStokes波は波形の場合と同様に、波の谷の印方でもう一つの山をもた収束性が悪いことを示している。

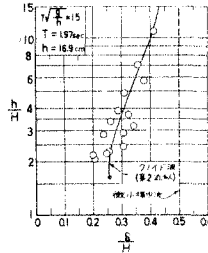


図-4 δ/H の比較

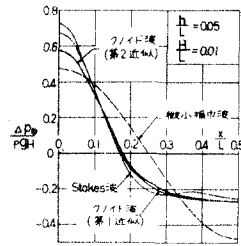


図-5 圧力の比較

5 流速に関する理論値の比較: 式(5)および式(6)から計算した u および w に対する各理論値の比較を $\delta=0.05$, $\delta=0.01$, $\alpha=-\frac{H}{2}+\delta$ の場合に対して行なったのが図-6および図-7である。どちらの図においてもStokes波理論の曲線が波の谷にあたる部分でその収束性が悪いことが分かる。またフノイド波の第1近似と第2近似を比較した場合、両者の差は w の方が u よりはるかに大きいことは興味深いことである。

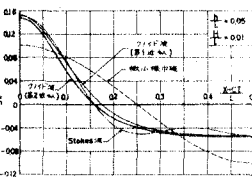


図-6 流速 u の比較

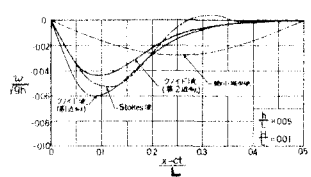


図-7 流速 w の比較

6 波速に関する各理論の適用範囲の考察: 図-8は波速 C を $\sqrt{gH}$ で割った値 $C/\sqrt{gH}$ を縦軸に、 $T/\sqrt{gH}$ を横軸にとり、 $\delta/H=2.0$ の場合について各理論の比較を行なったものである。Stokes波理論は $T/\sqrt{gH} > 20$ では収束性が悪く波速 C の値が徐々に減少しはじめている。一方、フノイド波理論は $T/\sqrt{gH} = 5$ のところで、波速に極大、図-8 波速に関する各理論値の比較があらわれ、それ以下の範囲は適用範囲外であることを示している。したがって図-2を参照すれば $15 < T/\sqrt{gH} < 5$ の領域についての両理論の適用性の検討をさらに実験によって確かめる必要がある。

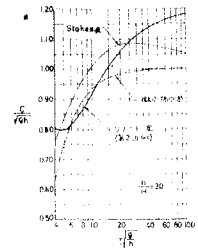


図-8 波速に関する各理論値の比較