

北海道大学工学部 正会員 岸 力

北海道大学大学院 学生会員 ○平山健一

1 Initial Value Method による数値計算法

洪水追跡計算における運動方程式は 未知量を流速 V , 水位 Z とすると (1) 式で与えられる。

$$\frac{\partial(EV)}{\partial t} + \frac{\partial(DV^2)}{\partial x} = -g \frac{\partial Z}{\partial x} - gV^2 \frac{N^2}{R^3} \quad (1)$$

ここに V : 平均流速 Z : 水位 R : 断面を代表する径深 N : 断面代表粗度係数
 D, E : 時間及び場所に関する加速度項の修正係数

一方 横流入量がないものとする 連続の式は (2) 式となる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

数値計算は図-1 のように直交格子で分割された $x-t$ 平面で行い 黒点で示される既知量より 時刻 $(m+\frac{1}{2})\Delta t$, 場所 $(n+\frac{1}{2})\Delta x$ 点における流速 $V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}$, 次に時刻 $(m+1)\Delta t$ 場所 $n\Delta x$ 点における水位 $Z_{m+1, n}$ を求める方法を次に述べる。(1) 式を点 P を中心として階差式に展開し (3) 式を得る。

$$E_{m+\frac{1}{2}} \frac{V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} - V_{m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + D_{m+\frac{1}{2}} V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} \frac{V_{m+1, n} - V_{m, n}}{\Delta x} = -g \frac{Z_{m+1, n} - Z_{m, n}}{\Delta x} - \left\{ gV^2 \frac{N^2}{R^3} \right\}_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} \quad (3)$$

ここで $V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} = 0.5(V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} + V_{m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}})$

$$V_{m+1, n} = 0.5(V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} + V_{m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}) \quad V_{m, n} = 0.5(V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} + V_{m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}})$$

$$D_{m+\frac{1}{2}} = 0.5(D_{m, n} + D_{m+1, n}) \quad E_{m+\frac{1}{2}} = 0.5(E_{m, n} + E_{m+1, n})$$

$$\text{右辺第2項は } g \times V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} \cdot V_{m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} \times \left\{ 0.5(N_{m, n} + N_{m+1, n}) \right\}^2 / \left\{ 0.5(R_{m, n} + R_{m+1, n}) \right\}^3$$

これらの値を代入して $V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}$ について解くと (4) 式を得る。

$$V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} \left[\frac{E_{m, n} + E_{m+1, n}}{2} + \Delta t \times g \times V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{N_{m, n} + N_{m+1, n}}{2} \right\}^2 / \left\{ \frac{R_{m, n} + R_{m+1, n}}{2} \right\}^3 - \frac{D_{m, n} + D_{m+1, n}}{8} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} - V_{m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}) \right] = \frac{E_{m, n} + E_{m+1, n}}{2} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (Z_{m, n} - Z_{m+1, n}) + \frac{D_{m, n} + D_{m+1, n}}{8} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} - V_{m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}) V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} \quad (4)$$

次に (2) 式を点 Q を中心として階差式にたおすと

$$A_{m+1, n} = A_{m, n} - (Q_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} - Q_{m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (5)$$

$$\text{ここで } Q_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} = \frac{A_{m+1, n} + A_{m, n}}{2} \times V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} \quad Q_{m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} = \frac{A_{m+1, n-1} + A_{m, n}}{2} \times V_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}$$

$A_{m+1, n}$ は未知量であるから 第0近似値として $Q_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} = \frac{A_{m, n} + A_{m+1, n}}{2} \times V_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}$ を用いて繰返し計算を行うものとする。水位 $Z_{m+1, n}$ は $A-Z$ 線より求める。

$A-Z$ 線は 3, 4, 5 次式で近似してあるが直接の解法は根の判別などの難点があり繰返し計算を用いる方が有利である。本研究では Δt 時間前に計算された水位 Z_0 , 断面積 A_0 を第0近似値とし、新たに計算された断面積 A_X と比べ (6) 式によって水位 Z_X の第1近似値を求める。

$$A_X - A_0 \geq 0; \quad Z_X = Z_0 + 1/100 \times 2^n \quad A_X - A_0 < 0; \quad Z_X = Z_0 - 1/100 \times 2^n \quad (6)$$

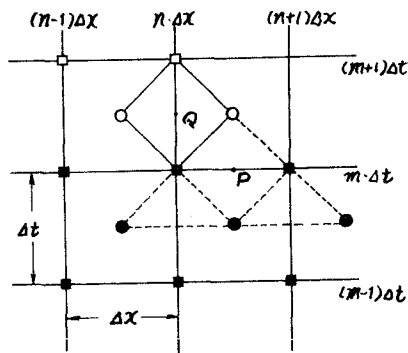


図-1

次に、この ΣX を $\Sigma -A$ 近似式へ代入し、新たに A_0 を求め同様に(6)式によって ΣX を求める操作を繰返す。ただしとは一般態につき1だけ増すものとし $r=0$ より始めれば第3近似では真値より 2.5^{mm} 以内にある。

2 境界条件 及び 初期値

上流端 $-\frac{1}{2}\Delta x$ の場所には $t-\Sigma$, $\Sigma-\bar{Q}$ 線を与え $V_{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ は $A_{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ を計算して $V_{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = (\bar{Q}/A)_{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ より求める。又 $A_{m+1,1}$ の計算式を(7)式に示す。

$$A_{m+1,1} = A_{m,1} - \{ (AV)_{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} - \bar{Q} \} \quad (7)$$

下流端 $N\Delta x$ で $t-\Sigma$ 線を与え、

$V_{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ の値は同時刻の隣接点より外挿により求める。初期値は時間0の格子点における Σ , 時間 $-\frac{1}{2}\Delta t$ の中間点における V を与えた。図2(a)(b)は上下流端の値の配置を示し $\square$ は境界条件 $\square$ は初期値 $\circ$ は外挿値 $\circ$ は計算値を示す。

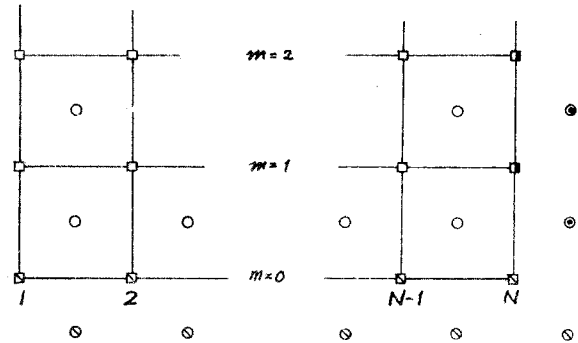


図-2 (a)

図2 (b)

3 非定常流における断面形の影響

井田は定常流の場合に断面形の影響を考えると(8)~(10)式が導かれることを示した。

$$R = \left(\frac{\sum b_i h_i^{\frac{5}{3}}}{\sum b_i h_i} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (8) \quad N = \frac{\sum b_i h_i^{\frac{5}{3}}}{\sum \frac{b_i h_i^{\frac{5}{3}}}{n_i}} \quad (9)$$

$$D = \alpha \frac{(\sum b_i h_i)^2 \sum \frac{b_i h_i^3}{n_i^3}}{(\sum \frac{b_i h_i^{\frac{5}{3}}}{n_i})^3} \quad (10)$$

同様の考え方を非定常流の運動方程式に適用すると時間に関する加速度項に(11)式で表わされる係数をもつ。

$$E = (1+\eta) \frac{(\sum b_i h_i) \sum \frac{b_i h_i^{\frac{7}{3}}}{n_i^3}}{(\sum \frac{b_i h_i^{\frac{5}{3}}}{n_i})^2}$$

但し $(1+\eta)$ は二次元流れの加速度項の補正係数

(11)

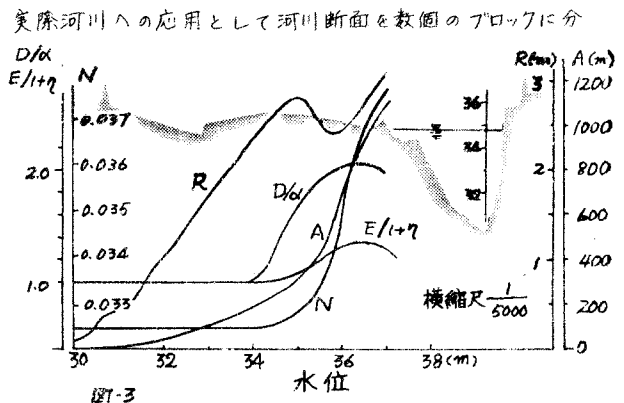


図-3

水位

図3に(8)~(11)式を用いて空知川9kmの断面の諸量の計算値を示す。高水数、低水数の粗度係数を各々0.05, 0.0324とした。 D/α , $E/(1+\eta)$ の値は低水数で一定値をとり、高水数で最大2.088, 1.360まで上昇する。本方法を採用する場合、断面を矩形に近く分割することが大切で、三角形の断面を含む場合、厳密解に比べ各値はかなりの誤差をもつこととなる。

4 数値計算例

石狩川支川空知川に37年に発生した洪水例を利用して、仮定した粗度係数、及び流量の変化等を調べる。下流端南空知太より上流赤平までの間17.5kmを17断面に切り各断面で $\Sigma -A$, $\Sigma -R$,

$Z-N$, $Z-D/\alpha$, $Z-E/1+\eta$ の近似式を作成した。低水数 高水数の相度係数を各々 0.0324, 0.05 とし 初期値は同時水位を与え 洪水波形に直線で結び 上下流端で実測の資料を与えた。 $\Delta x=1000\text{m}$ に対して $\Delta t=90\text{sec}$ を用いた。図5は上下流端で与えた $t-Z$ 線と上流端より 4.5km 下流における $t-Z$ 線で、この地点での実測値とはよくあっている。従って相度係数の仮定は妥当であると思われる。図4は各地点での Peak 流量と、おくれの時間を示しており peak 流量は余り減っていないことが観察される。

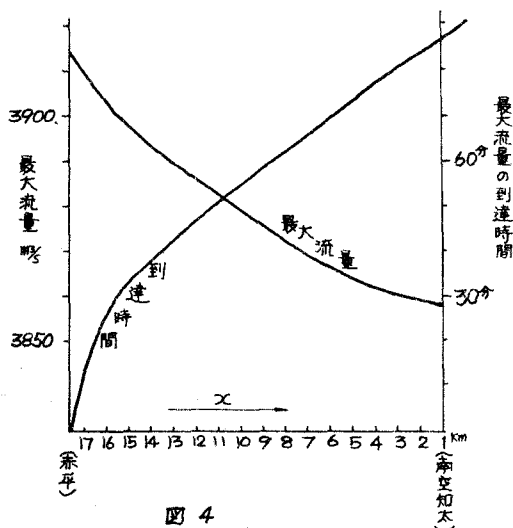
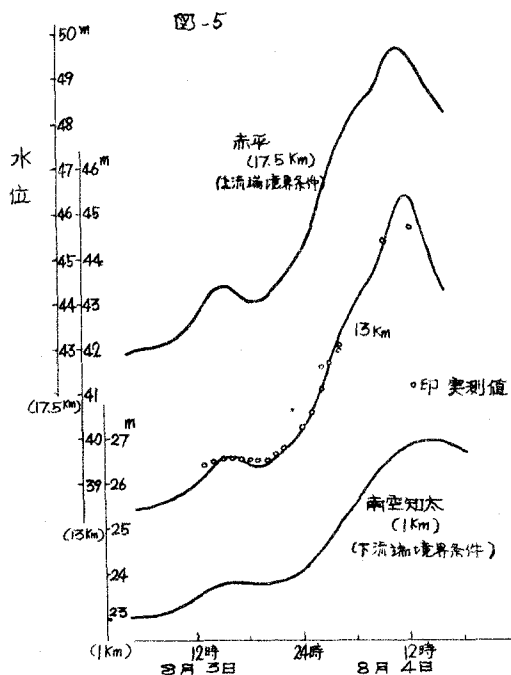


図 4



最後に本研究の一部は文部省特定研究“河川災害の総合的研究”代表者石原安雄教授によった。

参考文献

J. R. Rossiter: Computation of tidal conditions in the Thames Estuary by Initial Value Method
The Institution of Civil Engineers, Proceeding, May 1965 Volume 31

岸 平山: 河川における非定常流の数値解法 第20回年次学術講演会 講演要旨