Ⅱ－49　　特性曲線法による誤差の伝播について

建設省土木研究所　正員　星畑國松

1. まえがき　数値解法の実際河川への適用に際しては、河道そのものに対する誤差、境界および初期条件に対する誤差など計算過程において誤差の発生する機会は多く、その伝播の解明は計算法の開発のために必須のものである。本研究は一般性を失わない最も簡単な例として、流速および水深を従属変数とする特性曲線法に対する誤差方程式を導き、特に初期誤差に対する接近を試みる。

2. 基本式　面積と水深の関係を $A = ah^m$ とおくと、不定流の基本式は特性曲線上で次のように表わされる。

$$dx/dt = u + c \quad \cdots\cdots ①$$

の上で $du + 2m\,dc = g(S - S_f - S_a)dt \quad \cdots\cdots ②$

$$dx/dt = u - c \quad \cdots\cdots ③$$

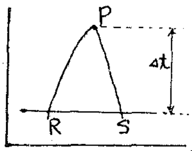
$$du - 2m\,dc = g(S - S_f + S_a)dt \quad \cdots\cdots ④$$

ここに、 A：断面積　u：流速　c：波速$\sqrt{gR}$　R：径深　S：河床勾配

$S_f = n^2u^2/R^{4/3}$　$S_a = (uc/ga)\,\partial a/\partial x$　n：粗度係数

①～④には、常微分の形と偏微分の形の両者が混在し、左辺の常微分は特性曲線上のものを表わし、右辺の偏微分は各時点におけるエネルギーの変化率を示す。

3. 差分式　以上より Δt 時間離れた左図の状況を考え、R・S・Pを特性曲線①または③式の上の点と考えると、右辺の値を Δt 時間前のR点S点で固定した最も簡単な式として、



$$u_P - u_R + 2m(c_P - c_R) = g(S_R - S_{fR} - S_{aR})\Delta t \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$u_P - u_S - 2m(c_P - c_S) = g(S_S - S_{fS} + S_{aS})\Delta t \quad \cdots\cdots ⑥$$

各添字は地点を示す。これよりP点の u、c が求められて、

$$u_P = \frac{1}{2}(u_R + u_S) + m(c_R - c_S) + \frac{g\Delta t}{2}\left(S_R + S_S - (S_{fR} + S_{fS}) - (S_{aR} - S_{aS})\right) \quad \cdots\cdots ⑦$$

$$c_P = \frac{1}{4m}(u_R - u_S) + \frac{1}{2}(c_R + c_S) + \frac{g\Delta t}{4m}\left(S_R - S_S - (S_{fR} - S_{fS}) - (S_{aR} + S_{aS})\right) \quad \cdots\cdots ⑧$$

4. 誤差方程式　3の計算過程に生ずる誤差を調べる。①～④の微分方程式の解を $\bar{u}$、$\bar{c}$ とし、S・S_f・S_a の真の値を $\bar{S}$、$\bar{S_f}$、$\bar{S_a}$、誤差をそれぞれ $\textcircled{u}$、$\textcircled{c}$、$\textcircled{s}$ 等で表わすと、

$$\textcircled{u} = u - \bar{u}, \quad \textcircled{c} = c - \bar{c}, \quad \textcircled{s} = S - \bar{S}, \quad \textcircled{s}_f = S_f - \bar{S_f}, \quad \textcircled{s}_a = S_a - \bar{S_a} \quad \cdots\cdots ⑨$$

$\bar{u}$ および $\bar{c}$ をR点、S点でテイラー展開すると、

$$\bar{u}_P = \bar{u}_{\substack{R\\S}} + \bar{u}'_{\substack{R\\S}}\Delta t + \frac{1}{2}\bar{u}''_{\substack{R\\S}}\Delta t^2 \quad \cdots\cdots ⑩,⑪$$

$$\bar{c}_P = \bar{c}_{\substack{R\\S}} + \bar{c}'_{\substack{R\\S}}\Delta t + \frac{1}{2}\bar{c}''_{\substack{R\\S}}\Delta t^2 \quad ⑫\ ⑬$$

最後の項は残差項である。⑥ ⑤式は誤差を含んだ計算であるから、これを真値と誤差とで表わすと、⑩～⑬を⑨とともに代入して

$$\bar{u}_{\substack{R\\S}} + \bar{u}'_{\substack{R\\S}}\Delta t + \frac{1}{2}\bar{u}''_{\substack{R\\S}}\Delta t^2 + \textcircled{u}_P - (\bar{u}_{\substack{R\\S}} + \textcircled{u}_{\substack{R\\S}}) \pm 2m\left(\bar{c}_{\substack{R\\S}} + \bar{c}'_{\substack{R\\S}}\Delta t + \frac{1}{2}\bar{c}''_{\substack{R\\S}}\Delta t^2 + \textcircled{c}_P - (\bar{c}_{\substack{R\\S}} + \textcircled{c}_{\substack{R\\S}})\right)$$

$$= g\left(\bar{S}_{\substack{R\\S}} + \textcircled{s}_{\substack{R\\S}} - \bar{S}_{f\substack{R\\S}} - \textcircled{s}_{f\substack{R\\S}} \mp \bar{S}_{a\substack{R\\S}} \mp \textcircled{s}_{a\substack{R\\S}}\right)\Delta t \quad \cdots\cdots ⑭⑮$$

②、④より

$$\bar{u}'_{\substack{R\\S}} \pm 2m(\bar{c}'_{\substack{R\\S}}) = g(\bar{S}_{\substack{R\\S}} - \bar{S}_{f\substack{R\\S}} \mp \bar{S}_{a\substack{R\\S}}) \quad \cdots\cdots ⑯⑰$$

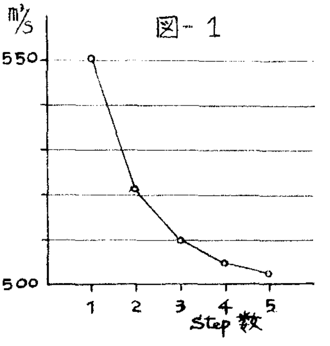
であるから、整理してP点の誤差を表わす式は以下のごとく導びかれる。

$$u_p=\frac{1}{2}(u_R+u_s)+m(c_R-c_s)+\frac{g}{2}(S_R-S_{fR}-S_{aR}+S_s-S_{fs}+S_{as})\Delta t$$
$$-\frac{1}{2}\Delta t^2(\overline{u''_R}+2m\overline{c''_R}+\overline{u''_s}-2m\overline{c''_s}) \cdots\cdots (18)$$
$$c_P=\frac{1}{4m}(u_R-u_s)+\frac{1}{2}(c_R+c_s)+\frac{g}{2}(S_R-S_{fR}-S_{aR}-S_s$$
$$+S_{fs}-S_{as})\Delta t-\frac{1}{2}\Delta t^2(\overline{u''_R}+2m\overline{c''_R}-\overline{u''_s}+2m\overline{c''_s}) \cdots\cdots (19)$$

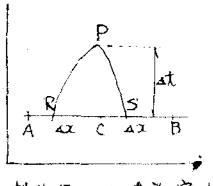
以上より、R点 S点の誤差がどのように伝播するかが把握できる。S_f S_aをさらに細分すると、

$$S_f=\overline{S_f}\left(2\frac{n}{n}+2\frac{u}{u}-\frac{4}{3}\frac{R}{R}\right) \cdots\cdots (20)$$
$$S_a=\overline{S_a}\left(\frac{u}{u}+\frac{c}{c}-\frac{a}{a}+\frac{\partial a/\partial x}{\partial a/\partial x}\right) \cdots\cdots (21)$$

となり、S_fはu cの誤差のカウンターウェイトとして働き、また河道特性の誤差は全空間に拡がることがわかる。



5. 初期誤差の伝播　　初期誤差の伝播は、(18)~(21)により算定できる。洪水伝播の特性を把握するためには、その特性曲線群によって全空間をおおうことが望ましいが、実際演算に際してはΔx・Δtを固定できる格子点法がより望ましい。しかし、洪水時におけるある時点におけるある時点の運動をそのみによっては表わし得ず、従って既知点A・C・BからR点およびS点を求める式としては近似式しかとり得ず、河道特性に不整がある場合には問題となる。ここでは断面算定に誤差の生じない一様断面、一様勾配の長方形水路を考え、格子点の直線内挿によりR・S点を求めることを許容して、次の二点について誤差の伝播を扱った。

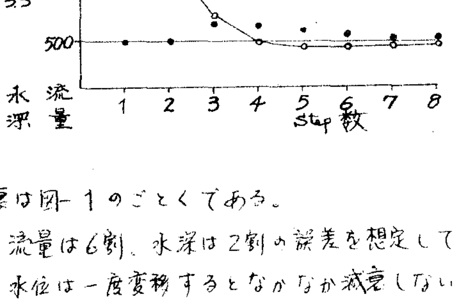


イ. 水位に誤差がなく流量に一定の誤差がある場合

ロ. 水位または流量が一点のみ大きな誤差を持つ場合

初期条件は定流を想定し、比較は水位および流量に誤差がない場合を基準として行った。結果は、

a. イ)の場合は、水位については(19)式から一定におちつき、流速は第一項((18)式)からuは平均化のみでのこることとなるが、第三項の効果によって1 step(計算は、$S=1/3000$、$n=0.03$、$B=100^m$、$\Delta x=2000^m$、$\Delta t=120^{sec}$、$h=3.54^m$、$Q=500^{m^3/s}$に対し、Qのみ$550^{m^3/s}$とした)で4割程度減衰した。step による減衰は図-1のごとくである。



b. ロについては、定常値$500^{m^3/s}$、3.54^mに対し、流量は6割、水深は2割の誤差を想定して計算を行ったが、流量の減衰は水位に比して大きく、水位は一度変移するとなかなか減衰しない。流量を一点で$800^{m^3/s}$にあげた例を図-2にかかげる。

c. ロについては、(18)(19)式の平滑化とともに格子化による平滑化の効果が大きい。

d. イ ロを通し、流速は水深と河道特性により支配されて安定化が早いが、水深は誤差をもてば問題多い。しかし、ロにより安定性が非常によいといいうる。