Ⅱ－43　　差分近似による不等流計算

名古屋大学工学部　正員　足立昭平
名古屋大学大学院　学生員　○伊藤宏慶

1．まえがき　開水路の不等流に関する差分計算における差分の適正値を検討したものである．

2．基礎方程式の差分表示における条件　開水路不等流の一次元エネルギー方程式は慣用の文字を用いて，通常次式で与えられる．すなわち，

$$dE/dx = \sin\theta(1-f) \tag{1}$$

$$E = h\cos\theta + (\alpha Q^2/2gA^2)\ , \qquad f = n^2Q^2/(R^{4/3}A^2\sin\theta) \tag{2}$$

(1)式のNewtonの内挿式展開による差分表示に際し，第1近似およびそれが許されるための誤差 ε_1 は，

$$\Delta E = \Delta x\cdot\sin\theta(1-f) \qquad \varepsilon_1 = \left|\tfrac{1}{2}(\dot{f}/f)\Delta x\right| \ll 1 \tag{3}$$

である．また，第2近似を用いる場合には

$$\Delta E = \Delta x\cdot\sin\theta\cdot\{(1-f)-\tfrac{1}{2}\Delta f\}\ , \quad \varepsilon_2 = \left|\tfrac{1}{12}(\ddot{f}/f)\Delta x^2\right| \ll 1 \tag{4}$$

であれば良い．水路の流水断面積Aおよび径深Rが

$$A = b\,h^r\ , \qquad R = h/r \tag{5}$$

で表わせるものとすれば，等流水深 h_n，および限界水深 h_c はそれぞれ，

$$h_n = (r^{4/3}n^2Q^2/b^2\sin\theta)^{1/2r+\frac{4}{3}}\ , \qquad h_c = (r\alpha Q^2/gb^2\cos\theta)^{1/2r+1} \tag{6}$$

であり，また(2)式の f は，

$$f = (h_n/h)^{2r+4/3} \tag{7}$$

と書き表わすことができる．なお，水路断面形に関する係数 b は x の関数とするが，指数 r は定数と見なされるものとする．したがって(7)式から f を x について微分した $\dot{f}/f$ および $\ddot{f}/f$ に，h_n を x について微分して得られる $\dot{h}_n/h_n$ および $\ddot{h}_n/h_n$ を代入すれば次式が得られる．すなわち，

$$\dot{f}/f = -2\frac{\dot{b}}{b}-(2r+\tfrac{4}{3})\frac{\dot{h}_n}{h_n}\ , \qquad \ddot{f}/f = 2\left\{3\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2-\frac{\ddot{b}}{b}\right\}+(2r+\tfrac{4}{3})\left\{4\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)\left(\frac{\dot{h}_n}{h_n}\right)+(2r+\tfrac{7}{3})\left(\frac{\dot{h}_n}{h_n}\right)^2-\frac{\ddot{h}_n}{h_n}\right\} \tag{8}$$

一方，(1)式を水面形方程式として知られている形で表わせば，

$$\dot{h} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-f+\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(h/b)\dot{b}(h_c/h)^{2r+1}}{1-(h_c/h)^{2r+1}} \tag{9}$$

であるから，

$$M = \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(h/b)\dot{b}\ , \qquad N = (h_c/h)^{2r+1} \tag{10}$$

とおけば，

$$\dot{h}/h = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-f+MN}{(1-N)h} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\ddot{h}/h = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{(1-N)^2h}\Big[&MN(1-N)(\ddot{b}/\dot{b})+\{2f-(2+3M-MN)N\}(\dot{b}/b)+\{(2r+\tfrac{4}{3}-\tfrac{1}{3}N)f\\&-(2r+1+2rM+MN)N\}(\dot{h}/h)\Big]\end{aligned} \tag{12}$$

が得られる．以上 $\dot{f}/f$ および $\ddot{f}/f$ の値は(8)；(11)，(12)式から水路断面に関する諸量および水深によって与えられ，したがって(3)あるいは(4)式の条件から，それぞれの近似式を用いる場合の差分 Δx の適正な値を吟味できることになる．

3．一様水路における差分の選び方

単純な一様水路の場合について前項に示した差分の条件を求める．この場合，b は一定であるから，

$$\dot{b} = \ddot{b} = M = 0 \tag{13}$$

であり，(8)，(11)式および(12)式は簡単化され，$\dot{f}/f$ および $\ddot{f}/f$ の値は次式のようになる．すなわち，

$$\dot{f}/f = -(2r+\tfrac{4}{3})\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-f}{(1-N)h}\ , \qquad \ddot{f}/f = (2r+\tfrac{4}{3})\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta\cdot h}\right)^2\frac{1-f}{(1-N)^3}\left[\{(2r+\tfrac{7}{3})-\tfrac{4}{3}N\}-\{(4r+\tfrac{11}{3})-(2r+\tfrac{8}{3})N\}f\right] \tag{14}$$

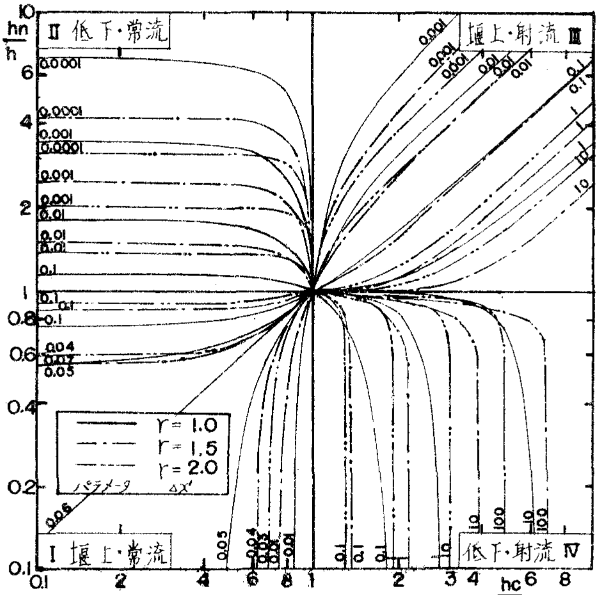
したがって、(14)の関係式を(3)および(4)式にそれぞれ代入して、差分Δxについて整理する。

$$\left|\frac{\Delta x \sin\theta}{h \cos\theta}\right| = \left|-2(1-N)/(2r+4/3)(1-f)\right| \cdot \varepsilon_1 \tag{15}$$

$$\left|\frac{\Delta x \sin\theta}{h \cos\theta}\right| = \sqrt{12\varepsilon_2/\left|(2r+4/3)\frac{(1-f)}{(1-N)^3}\left[\{(2r+7/3)-\frac{4}{3}N\}-\{(4r+11/3)-(2r+8/3)N\}f\right]\right|} \tag{16}$$

いま、比エネルギーEの誤差が1/10以下ならば許容できるとする。(3)および(4)の近似式が許される誤差、ε_1およびε_2は、$\varepsilon_1=\varepsilon_2=1/10$であり、(15)および(16)式より$h_n/h$，$h_c/h$，$r$によって差分$\Delta x$の無次元量、$\left|\frac{\Delta x \sin\theta}{h\cos\theta}\right|$（$=\Delta x'$とおく）がわかる。

なお、rは(5)式より水路断面形を表わす指数で$r=1$，1.5，2のときそれぞれ長方形，放物線形，三角形断面を表わしている。また$r>2$のとき朝顔型の断面を表わす。図1および図2は差分$\Delta x'$を決定する無次元量h_n/h，h_c/hをそれぞれ縦軸および横軸にとり$\Delta x'$をパラメータとして示したものである。



両図から、$\Delta x'$が$h_n/h=1$および$h_c/h=1$で区分される四つの領域で、それぞれ特性づけられることがわかる。

a)、領域Ⅰ、堰上背水ー常流、

$\Delta x'$はh_n/h，h_c/hの変化に対しあまり大きく変化せずrの影響は少ない。

b) 領域Ⅱ、低下背水ー常流、

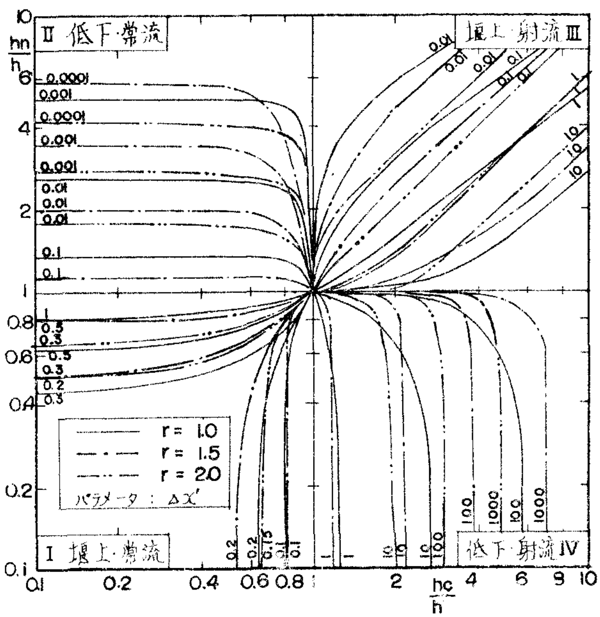
$h_c/h=1$の近傍を除いて$\Delta x'$がh_c/hにあまり関係しないで、h_n/hによって大きく変化し、h_n/hが大きくなるにつれ、rの影響も大きくなる。

c)、領域Ⅲ、堰上背水ー射流、

h_n/hとh_c/hの両方の値が$\Delta x'$に影響する

d)、領域Ⅳ、低下背水ー射流、

h_n/hよりもむしろh_c/hによって$\Delta x'$が大きく変化する。



したがって、各水面形に応じて、その適当な差分を選ぶとすれば、簡単な近似式で十分な解が得られる。また一方水深が限界水深や等流水深の近傍になると取るべき差分の値が著しく変化するために誤った結果を導く恐れがある。