

大阪工業大学 正 員 久保 弘一

同 上 学生員 松村 健彦

同 上 学生員 玄 光彦

1 緒言

一様な流れの中に流れと垂直におかれた円柱が流れから受ける力の時間的な変動および円柱に周期的な強制外力を与えて流れの中で起振させた時の応答についての解析を理論的および実験的に試みた。

速度 U の一様な流れに垂直においた円柱には、流れの方向に抵抗力 (D) および流れと直角方向に揚力 (L) が作用する。レイノルズ数が $10 \sim 10^5$ 程度の範囲にある場合には、これらの抵抗力、揚力は円柱の後流領域に発生する渦列に原因するものであることは一般的に認められている。いま抵抗力、揚力の原因として後流領域の Vortex street のみを考え、また単位時間における Vortex pair の発生数を f_v とすると、抵抗力は $2f_v$ 、揚力は f_v の周波数でそれぞれ変動するものとみなせる。したがって、次のように合成抵抗力係数 (C_{Dt})、合成揚力係数 (C_{Lt}) なる概念を導入すると抵抗力、揚力の時間的な変動を表現できる。すなわち、

$$D = \frac{1}{2} C_{Dt} \rho U^2 d h \quad \text{-----(1)} \quad L = \frac{1}{2} C_{Lt} \rho U^2 d h \quad \text{-----(2)}$$

$$C_{Dt} = C_D + C_{Df} \exp\{i(4\pi f_v t + \theta_1)\} \quad \text{-----(3)} \quad C_{Lt} = C_L \exp\{i(2\pi f_v t + \theta_2)\} \quad \text{-----(4)}$$

ただし、円柱の直径を d 、浸水部の長さを h 、水の単位質量を ρ とする。(3)式における合成抵抗力係数 C_{Dt} は実験によって決定しなければならないが、 C_D および (4) 式の C_L は Potential theory による。

$$C_D = \frac{\rho}{2} \left\{ 1.58 \left(\frac{V'}{U} \right) - 0.620 \left(\frac{V'}{U} \right)^2 \right\} \quad \text{-----(5)} \quad C_L = 2.82 \frac{\rho}{2} \left(\frac{V'}{U} \right) \quad \text{-----(6)}$$

である。上式における V' は Vortex street の速度、 ℓ は間隔である。

2 実験装置

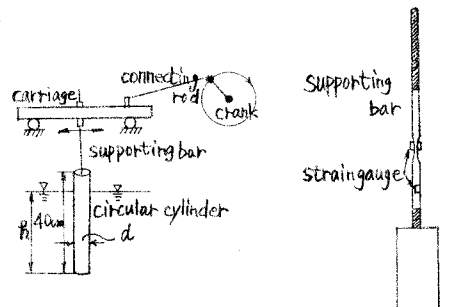
実験に使用した水路は幅約 70 cm、最大水深 40 cm、長さ 20 m のコンクリート矩形断面で、水路勾配 $1/200$ 、粗度係数 約 0.012 である。実験に使用した流量は 32.3 l/sec で水深は下流の sluice gate を操作して調節した。なお流速はピトー管を用いて測定し、4 乗法で平均流速を計算した。

次に起振装置の mechanism は (図-1) に示す通りで最大出力 $1/2 \text{ HP}$ のモーターによる Pulley の回転運動を Piston-crank system により Carriage の水平ピストン運動に転換し Supporting bar に取付けた cylinder に水平運動を与えた。Pulley の driving frequency を f とすると Carriage の速度 V は近似的に次式によって計算できる。

$$V = i V_{\max} \exp\{i(2\pi f t + \theta)\} \quad \text{-----(7)}$$

$$\text{ただし、} V_{\max} = \frac{\pi f x_a}{1 \cos \theta} \quad \theta = \pm \tan^{-1} \left(\frac{\ell}{r} \right) - \frac{\pi}{2}$$

x_a は Carriage の振幅、 ℓ は connecting rod の長さ、 r は crank の長さである。流れの中で円



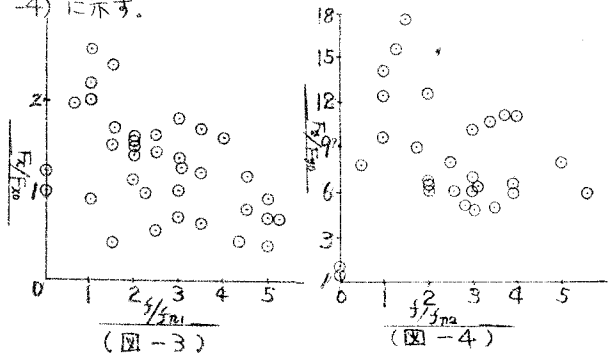
柱が受ける力の測定は Supporting bar に取付けた strain gauge を通じて、たわみを Oscillograph で記録した。また Pully の driving frequency f は電気接点と設けて Oscillograph に記録した。

3. 実験結果

	d	h	h/d	u	Re	f_n	f_e
1	80 mm	35	4.4	14.6	1.1×10^4	$f_{n1}=0.619$	0.37
2	"	"	"	19.9	1.6 "	$f_{n2}=0.637$	0.50
3	48	21	"	14.6	7.0 "	$f_{n1}=1.34$	0.61
4	"	"	"	19.9	9.6 "	$f_{n2}=1.47$	0.83
5	80	26.7	3.3	15.6	1.2 "	$f_{n1}=0.715$	0.39
6	"	"	"	21.0	1.7 "	$f_{n2}=0.710$	0.52
7	48	16	"	15.6	7.5 "	$f_{n1}=1.44$	0.65
8	"	"	"	21.0	1.0 "	$f_{n2}=1.48$	0.87

(表-1)

実験は(表-2)の組合わせで行った。結果は(図-3)、(図-4)に示す。



F_x : 流れ方向の力 F_{x0} : 一様な流れに対する最大抗力
 F_y : 流れと直角方向の力 F_{y0} : 一様な流れに対する最大揚力

f_{n1} : 円柱の水中での流れ方向の固有振動数

f_{n2} : 円柱の水中での流れと直角方向の固有振動数

4. 理論解析

流れの方向を x 軸、流れと直角の方向を y 軸として水中にある

円柱に Newton の運動のオズボーン法則を適用すると、

$$(M+m)\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3EI}{S^3}x + 2(M+m)\pi\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\rho u^2 dh [C_0 + C_0 \exp\{i(4\pi f t + \theta_1)\}] + \frac{1}{2}\rho d h C_2 \exp\{i(2\pi f t + \theta_2)\} V_{\max}^2 [\exp\{i(4\pi f t + 2\theta)\}] \quad (8)$$

$$(M+m)\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{3EI}{S^3}y + 2(M+m)\pi\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\rho u^2 d h C_1 \exp\{i(2\pi f t + \theta_2)\} + \frac{1}{2}\rho d h [C_0 + C_0 \exp\{i(4\pi f t + \theta_1)\}] V_{\max}^2 [\exp\{i(4\pi f t + 2\theta)\}] + M' \quad (9)$$

ただし、 E : Supporting bar のヤング係数 I : Supporting bar の断面2次モーメント

S : Supporting bar の長さ M' : Carriage が加速度運動しているための慣性力

m : 仮想質量 (Potential theory によると $\frac{1}{4}\rho d^2 h$ である) n : 減衰率

f_e : 速度 V に対する Vortex pair の発生周波数 $\theta_1, \theta_2, \theta, \theta_1', \theta_2'$: 位相角

(8)(9)式は2階線型非斉次常微分方程式であるが、これらの斉次方程式の基本解はいずれも時刻 t とともに減衰してしまう項であるので、一般解としては非斉次方程式の特解のみを採用すればよい。さらに Supporting bar を片持梁と考えると、上式の解と bar のたわみとみなすことにより、(8)(9)式の解から流れ方向の力 F_x および流れと直角方向の力 F_y を計算する。

$$F_x = \frac{3EI}{S^3} \left[\frac{A_4}{\sqrt{16\pi^4 (f_{n1}^2 - 2f_e)^2 + \beta}} \sin(4\pi f t + \alpha_4) + \frac{A_5}{\sqrt{16\pi^4 (f_{n2}^2 - (f_e + 2f)^2 + \beta)}} \sin\{2\pi(f_e + 2f)t + \alpha_5\} \right] \quad (10)$$

$$F_y = \frac{3EI}{S^3} \left[\frac{A_6}{\sqrt{16\pi^4 (f_{n2}^2 - f_e^2) + \beta}} \sin(2\pi f t + \alpha_6) + \frac{A_7}{\sqrt{16\pi^4 (f_{n2}^2 - 2f_e^2) + \beta}} \sin(4\pi f t + \alpha_7) + \frac{A_8}{\sqrt{16\pi^4 (f_{n2}^2 - (f_e + 2f)^2 + \beta)}} \sin\{4\pi(f_e + f)t + \alpha_8\} + \frac{A_9}{\sqrt{16\pi^4 (f_{n2}^2 - f_e^2) + \beta}} \sin(2\pi f t + \alpha_9) \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{jC_D}{(2\pi f n_1)^2} U^2 & P_1 &= 64\pi^2 n_1^2 f_e^2 & \alpha_3 &= \theta_1 + \tan^{-1} \left\{ \frac{(2\pi f n_1)^2 - 16\pi^2 f_e^2}{8\pi n_1 f_e} \right\} \\
A_4 &= jC_{Df} U^2 & P_2 &= 16\pi^2 n_1^2 (f_e' + 2f)^2 & \alpha_4 &= 2\theta + \theta_2 + \tan^{-1} \left\{ \frac{(2\pi f n_1)^2 - 4\pi^2 (f_e' + 2f)^2}{4\pi n_1 (f_e' + 2f)} \right\} \\
A_5 &= jC_L V_{max}^2 & P_3 &= 16\pi^2 n_1^2 f_e^2 & \alpha_5 &= \theta_2 + \tan^{-1} \left\{ \frac{(2\pi f n_1)^2 - 4\pi^2 f_e^2}{4\pi n_1 f_e} \right\} \\
A_6 &= jC_L U^2 & P_4 &= 64\pi^2 n_1^2 f^2 & \alpha_6 &= 2\theta + \tan^{-1} \left\{ \frac{(2\pi f n_1)^2 - 16\pi^2 f^2}{8\pi n_1 f} \right\} \\
A_7 &= jC_D V_{max}^2 & P_5 &= 64\pi^2 n_1^2 (f_e' + f)^2 & \alpha_7 &= 2\theta + \theta_1 + \tan^{-1} \left\{ \frac{(2\pi f n_1)^2 - 16\pi^2 (f_e' + f)^2}{8\pi n_1 (f_e' + f)} \right\} \\
A_8 &= jC_{Df} V_{max}^2 & P_6 &= 16\pi^2 n_1^2 f^2 & \alpha_8 &= \tan^{-1} \left\{ \frac{(2\pi f n_1)^2 - 4\pi^2 f^2}{4\pi n_1 f} \right\} \\
A_9 &= \frac{M'}{(M+M)} \left. \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix} \right\} & & & & \text{Supporting barの長さ} \text{と strain gauge 貼付位置, 水深} h \text{によって決まる定数} \\
j &= \frac{1}{2} \rho d h (M+M)^{-1} & & & &
\end{aligned}$$

5. 考察

(10)(11)式によって流れの中での円柱の応答を定性的に予想できる。(10)式によると $f_{n1} = 2f_e$ 、あるいは、 $f_{n1} = (f_e' + 2f)$ の場合に x 方向に共鳴現象が起る可能性がある。実験では(表-1)に示されるように、 $f_{n1} = 2f_e$ とみなせる為、 $f/f_{n1} < 1$ において、 F_x が増加していることが(図-3)より知られる。しかし、 $f > f_{n1}$ の場合には(10)式の右辺第2項が次第に減小してゆくため全体として、 F_x は減小の傾向にあるとみなせる。また(11)式によると、 $f_{n2} = f_e$ 、 $f_{n2} = 2f$ 、 $f_{n2} = 2f_e' + 2f$ 、 $f_{n2} = f$ の場合に F_y は共鳴により無限大あるいは不変になると考えられるが、実験では(図-4)に示したように、 $f/f_{n2} = 1$ から2の範囲で F_y が増加していることが認められる。Carriageにより円柱を起振させた場合は一様な流れに対する揚力に比して F_y はほぼ4倍以上となっているがこれは速度 V による抗力および仮想質量力が速度 U による揚力に加わったためと考えられる。

6. 結論

円柱が非常に flexible に支持されている場合には揚力は抗力に比して理論的には(5)(6)式よりほぼ2倍となることが予想される。またこのような円柱に周期的な強制外力を与えて流れの中で起振させると、一様な流れに対する揚力に比して4倍以上の力が流れと直角の方向に作用する。このようなことを考慮して水中に細長い非常に flexible な柱状構造物を設計する場合には種々の共鳴現象を起させる可能性がないように断面寸法を決定してやらなければならない。

7. あとがき

本実験で使用した Supporting bar は円形断面であるが rigid な正方形断面の bar に対しても、現在、実験継続中である。また合成抗力係数 C_{Df} の決定に対しても現在研究中であるが、これらについては次の機会に発表する予定である。

参考文献

- Bishop & Hassan: "The Lift & Drag Forces on a Circular Cylinder in a Flowing Fluid."
Proc. of the Royal Society Series A No. 1368 Jan. 1964
- " : "The Lift & Drag Forces on a Circular Cylinder Oscillating in a Flowing Fluid."
Proc. of the Royal Society Series A No. 1368 Jan. 1964
- A.D.K. Laird: "Eddy Forces on Rigid Cylinders." Proc. of ASCE Vol. 87, No. WW4, Nov. 1961
- " : "Water Forces on Flexible Oscillating Cylinders." Proc. of ASCE Vol. 88 No. WW3 Aug. 1962
- Thomson: "Theoretical Hydrodynamics."