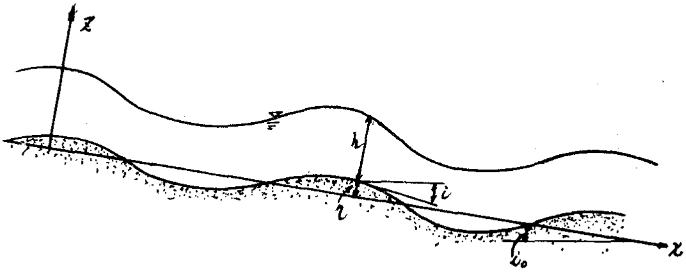
II－11　そ上する砂堆の一解法について

神戸大学　正員　松梨順三郎

急勾配の移動床水路では，いわゆるそ上する砂堆が発生する。この砂堆について，そのそ上速度は一般に非常に緩慢であり，その形状はかなり規則的な正弦波形をもっている。したがってその背面を流下する水流も河床形状に対応した水面波形をもち，砂堆の移動にそって徐徐にその波形が移動していると考えてよいようである。そして，ある場合には，下流のものほどその波高が増大し，ある限界になると，その砂堆はいわゆる跳水現象を伴ってくずれていくようである。ここではこのような跳水現象にいたるまでの，いわば，安定した砂堆に注目し，その運動機構を理論的にとらえようとする一つの試算を示す。



1　基礎方程式　　二次元とし，水流の時間的変化は非常に緩慢であるので，その非定常項は省略した。そして，次式で示されるような関係方程式を用いた。

$$-i+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{u_*^2}{gR}+\beta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{hv^2}{3g}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}-\frac{hv^2}{2g}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=0^{1)},\quad \frac{\partial}{\partial x}(hv)=0 \qquad (1),(2)$$

$$q_T=\alpha' u_*(u_*^2-u_{*c}^2)^{m'}\fallingdotseq\alpha' u_*^{m}\quad(u_*\gg u_{*c}) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{1}{1-\lambda}\frac{\partial}{\partial x}(q_T)=0,\quad i=i_0-\frac{\partial \eta}{\partial x},\quad u_*=\frac{g^{1/2}nq}{h^{7/6}} \qquad (4),(5),(6)$$

ここに，$\beta=2\int_0^h(v/v_m)^3/h\cdot dh-\int_0^h(v/v_m)^2/h\cdot dh$　である。未知量は i，h，v，η，q_T，u_* の6個で関係式は(1)～(6)であるから，原理的にはこれらの方程式を連立方程式として解くことが可能である。式(2)より $hv=q$ とし，q_T，i，u_*，v を消去すると，h，η に関するつぎの二つの方程式をうる。

$$h^{\{7(m-1)+13\}/6}\frac{\partial \eta}{\partial t}-\frac{7}{6}\frac{\alpha' m}{1-\lambda}g^{m/2}q^m n^m\frac{\partial h}{\partial x}=0 \qquad (7)$$

$$-i_0+\frac{n^2q^2}{h^{10/3}}+\left(1-\frac{\beta}{g}\frac{q^2}{h^3}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{q^2}{3g}\frac{1}{h}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{q^2}{2g}\frac{1}{h}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}=0 \qquad (8)$$

いま砂堆の移動速度を上流方向に ω であるとし，上流方向に ω で移動する動座標 $\xi=x+\omega t$ を用いると，水面形および砂堆の波形はこの座標に対して静止する。すなわち，

$$\varepsilon h^k\frac{d\eta}{d\xi}-Kn^m\frac{dh}{d\xi}=0,\quad -i_0+\frac{n^2q^2}{h^{10/3}}+\left(1-\frac{\beta}{g}\frac{q^2}{h^3}\right)\frac{dh}{d\xi}+\frac{q^2}{3g}\frac{1}{h}\frac{d^3h}{d\xi^3}+\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{q^2}{2g}\frac{1}{h}\frac{d^3\eta}{d\xi^3}=0 \qquad (9),(10)$$

ここに，$\varepsilon=\omega/v_m$，$v_m=(1/LT)\int_0^L dx\int_0^T v\,dt$，$h_m=(1/LT)\int_0^L dx\int_0^T h\,dt$，$k=\{7(m-1)+13\}/6$ とする。

2　解の誘導

方程式(9), (10)を，つぎの境界条件で解くことにする。

$$\left[\eta\right]_{\varsigma=0}=0\ ,\quad \left[\frac{d\eta}{d\varsigma}\right]_{\varsigma=0}=A_0\ ,\quad \left[\frac{d^2\eta}{d\varsigma^2}\right]_{\varsigma=0}=0\ ,\quad \left[h\right]_{\varsigma=0}=H_0 \qquad (11)$$

は非常に微小量であるので，これを媒介変数として，せつ動の方法を用いる。すなわち，

$$\eta=\eta_0+\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\cdots,\quad h=h_0+\varepsilon h_1+\varepsilon^2 h_2+\cdots,\quad n=n_0+\varepsilon n_1+\varepsilon^2 n_2+\cdots \qquad (12)$$

とおいて，これらを(9), (10)式に代入し，非せつ動方程式を求めると，

$$\frac{dh_0}{d\varsigma}=0,\quad -i_0+\frac{n_0^2 q^2}{h_0^{10/3}}+\left(1-\frac{\beta q^2}{g h_0^3}\right)\frac{dh_0}{d\varsigma}+\frac{q^2}{3gh_0}\frac{d^3h_0}{d\varsigma^3}+\frac{d\eta_0}{d\varsigma}+\frac{q^2}{2gh_0}\frac{d^3\eta_0}{d\varsigma^3}=0 \qquad (13),(14)$$

をうる。$[\eta_0]_{\varsigma=0}=0$, $[d\eta_0/d\varsigma]_{\varsigma=0}=A_0$, $[d^2\eta_0/d\varsigma^2]_{\varsigma=0}=0$, $[h_0]_{\varsigma=0}=H_0$ の境界条件を満足するように上式を解くと，つぎの解が得られる。

$$h_0=H_0\ ,\quad \eta_0=\frac{A_0}{p}\sin p\varsigma\ ,\quad n_0=\sqrt{\frac{i_0 H_0^{10/3}}{q^2}}\ ,\quad \text{ただし，}\ p=\sqrt{\frac{2gH_0}{q^2}} \qquad (15)$$

つぎに，ε の一乗の係数を0とおき，第二近似解を与える3方程式を求め，第1近似解(15)式を代入すると，

$$\frac{dh_1}{d\varsigma}=\frac{1}{Kn_0^m}H_0^k A_0\cos p\varsigma\ ,\quad \frac{d^3\eta_1}{d\varsigma^3}+p^2\frac{d\eta_1}{d\varsigma}=A+B\sin p\varsigma+C\cos p\varsigma+D\sin 2p\varsigma \qquad (16),(17)$$

をうる。ここに，$A=-4gH_0^{-7/3}n_0n_1$, $B=(20/3)(gA_0H_0^{k-10/3})/(Kn_0^{m-2}p)$, $C=(H_0^kA_0p^2/Kn_0^m)(-1/3+2\beta/H_0^2p^2)$, $D=-(A_0^2pH_0^{k-1})/(2Kn_0^m)$ とする。(16), (17)式を境界条件 $[\eta_1]_{\varsigma=0}=0$, $[d\eta_1/d\varsigma]_{\varsigma=0}=0$, $[d^2\eta_1/d\varsigma^2]_{\varsigma=0}=0$, $[h_1]_{\varsigma=0}=0$ によって解くと，つぎの解をうる。

$$h_1=\frac{H_0^kA_0}{Kn_0^m}\frac{1}{p}\sin p\varsigma\ ,\quad \eta_1=\eta_{1s}+\eta_{1u}\ ,\quad n_1=0 \qquad (18),(19),(20)$$

ここに，η_{1s}, η_{1u} はそれぞれ周期解および非周期であり，次式で与えられる。

$$\eta_{1s}=\frac{D}{2p^3}-\frac{2D}{3p^3}\cos p\varsigma+\frac{D}{6p^3}\cos 2p\varsigma\ ,\quad \eta_{1u}=-\frac{B}{p^3}+\frac{B}{p^3}\cos p\varsigma+\frac{C}{2p^3}\sin p\varsigma-\frac{C}{2p^2}\varsigma\cos p\varsigma+\frac{B}{2p^2}\varsigma\sin p\varsigma \qquad (21),(22)$$

よって，第二近似解，$\eta=\eta_0+\varepsilon\eta_1$，$h=h_0+\varepsilon h_1$ は，

$$\eta=\frac{A_0}{p}\sin p\varsigma+\varepsilon\left\{\left(\frac{D}{2p^3}-\frac{2D}{3p^3}\cos p\varsigma+\frac{D}{6p^3}\cos 2p\varsigma\right)+\left(-\frac{B}{p^3}+\frac{B}{p^3}\cos p\varsigma+\frac{C}{2p^3}\sin p\varsigma-\frac{C}{2p^2}\varsigma\cos p\varsigma+\frac{B}{2p^2}\varsigma\sin p\varsigma\right)\right\} \qquad (23)$$

$$h=H_0+\varepsilon\left(\frac{H_0^kA_0}{Kn_0^m}\frac{1}{p}\sin p\varsigma\right) \qquad (24)$$

をうる。図は(23)式の一計算例である。この時の砂堆の実験波高6.8cm，波長62cmで，かなりよく一致している。

1) 本間仁，高等水理学，昭和17年度版，P.52；または Forchheimer著，Hydraulik，P. 238.