

京都大学工学部 正 員 工博 小 西 一 郎

京都大学工学部 正 員 工博 白 石 成 人

京都大学大学院 学生員 工修 〇神部 俊 一

1. まえがき — 軸線形状がう線である曲線げたにたいして, けた断面の広がりも考慮に入れた, ひずみの式を求め, この式から近似的に曲げねじれ理論が適用できることを示し, ついで行列による解法について述べる.

2. 基礎方程式 — けた断面の図心を結ぶ軸線を考え, この軸線の単位接線ベクトルを ξ , 単位主法線ベクトルを η , 単位陪法線ベクトルを ζ とし, これらの方向に座標軸を一致させ直交座標系 (右手系) $O-X$ を構成する。以下において切断面 (YZ 平面) 上の量には $(\sim)$ を, 変形後の量には $(*)$ をつけて表わすことにする。軸線の位置ベクトルを

$$r = (a \cos \theta) i + (a \sin \theta) j + (b \theta) k \quad (1)$$

軸線のねじれ回転角を φ , 変位を

$$V = u \xi + v \eta + w \zeta \quad (2)$$

とすると, 軸線の微小回転ベクトル Ω , 微小回転率ベクトル Ψ は (1) 式より, それぞれ

$$\Omega = \varphi \xi + \frac{d\varphi}{ds} \times \frac{dr}{ds}^*, \quad \Psi = \frac{d\Omega}{ds} = \psi_x \xi + \psi_y \eta + \psi_z \zeta \quad (3)$$

切断面の位置ベクトルを, $\tilde{r} = r + p$ ($p = y \eta + z \zeta$) とすると, けたの母線の単位接線ベクトル $\tilde{e}$ は $\tilde{e} = \left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial s}, \frac{\partial \tilde{r}}{\partial s} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial s}$ で与えられる。よって切断面の変位 $\tilde{w}$ は, そり変位を $\tilde{u}$ とすると

$\tilde{w} = (V + \Omega \times p) + \tilde{u} \tilde{e}$ となるから, $\tilde{r}^* = \tilde{r} + \tilde{w}$ を用いて, ひずみ成分は

$$d\tilde{r}^* \cdot d\tilde{r}^* - d\tilde{r} \cdot d\tilde{r} = 2 d\tilde{r} \cdot \tilde{y} \cdot d\tilde{r} \quad (4)$$

より求まる。切断面上の ξ -方向の線要素 $d\tilde{s}_{\xi}$, と ds との関係式

$$d\tilde{s}_{\xi} = \left\{ (1 - \kappa y)^2 + \tau^2 (y^2 + z^2) \right\}^{\frac{1}{2}} ds \approx (1 - \kappa y) ds \quad \text{を考慮すると, ひずみ成分}$$

γ_{ij} ($i, j = x, y, z$) は次式で与えられる。ここに, κ, τ はそれぞれ軸線の主曲率, および主ねじり率である。式 (4) に式 (2), (3) に示される変位成分を代入すれば, ひずみ成分はつぎのようになる。

$$\gamma_{xx} \approx (1 - \kappa y)^{-1} \varepsilon + \tau (y^2 + z^2) (1 - \kappa y)^{-2} \psi_x + (1 - \kappa y)^{-1} z \psi_y - (1 - \kappa y)^{-1} y \psi_z + (1 - \kappa y)^{-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}$$

$$\gamma_{xy} \approx \frac{1}{2} \left\{ -(1 - \kappa y)^{-1} z \psi_x - \tau z (1 - \kappa y)^{-2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + (1 - \kappa y)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} (1 - \kappa y)^{-1} \tilde{u} \right\}$$

$$\gamma_{xz} \approx \frac{1}{2} \left\{ (1 - \kappa y)^{-1} y \psi_x + \tau y (1 - \kappa y)^{-2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + (1 - \kappa y)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (1 - \kappa y)^{-1} \tilde{u} \right\}$$

$$\begin{aligned} y_{yz} &\approx \frac{1}{2} \left\{ \tau y \frac{\partial}{\partial y} (1 - \kappa y)^{-1} \bar{u} - \tau z \frac{\partial}{\partial z} (1 - \kappa y)^{-1} \bar{u} \right\} \\ y_{yy} &\approx -\tau z \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (1 - \kappa y)^{-1} \bar{u} \right\} \quad y_{zz} \approx \tau y \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (1 - \kappa y)^{-1} \bar{u} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 ε は軸線の軸方向のひずみであり、 $\varepsilon = \frac{du}{ds} - \kappa v$ で与えられる。今、例として $\alpha = 1.8\pi b$ 、 $y_{max} \approx z_{max} = 10^{-1}a$ とすると軸線の傾斜角 ϕ は、 $\phi = 10^\circ$ 、 $(1 - \kappa y)_{min}^{-1} = 0.91$ 、 $\tau y_{max} = 0.018$ となる。よって変位とひずみの関係式で τ のついた項を省略することができ、この場合ひずみ成分は近似的に各断面で円筒軸が ϕ だけ傾いた円筒座標による表示式になっている。したがって曲げねじり理論を近似的に適用することは可能である。つぎに断面に作用する

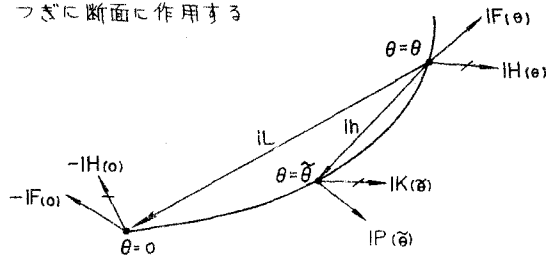
力 F およびトルク H を次式で定義する。

$$\begin{aligned} F &= N\xi + Q_y\eta + Q_z\zeta = \{F\} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}^T \\ H &= T\xi + M_y\eta + M_z\zeta = \{H\} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}^T \end{aligned}$$

ここに

$$N = E \int_F \chi_{xx} dF \quad Q_y = 2G \int_F \chi_{xy} dF \quad Q_z = 2G \int_F \chi_{xz} dF$$

$$T = 2G \int_F (z\chi_{xy} - y\chi_{xz}) dF \quad M_y = E \int_F \chi_{xx} y dF \quad M_z = -E \int_F \chi_{xx} z dF$$



断面 $\theta = \tilde{\theta}$ に作用する外力を P 、外力トルクを K とすると、平衡条件式は

$$F(\theta) + P(\tilde{\theta}) - F(0) = 0, \quad H(\theta) - H(0) + K(\tilde{\theta}) + IL \times (-F(0)) + IH \times P(\tilde{\theta}) = 0$$

ここで $F(\theta) = R_0^2 E \bar{F}(\theta)$ 、 $H(\theta) = R_0^3 E \bar{H}(\theta)$ 、 $P(\tilde{\theta}) = R_0^2 E \bar{P}(\tilde{\theta})$ 、 $K(\tilde{\theta}) = R_0^3 E \bar{K}(\tilde{\theta})$ 、 $R_0^2 = a^2 + b^2$ のような無次元化した $\bar{F}(\theta)$ 、 $\bar{H}(\theta)$ 、 $\bar{P}(\tilde{\theta})$ 、 $\bar{K}(\tilde{\theta})$ を用いれば、

$$\begin{aligned} \{\bar{F}(\theta)\}^T &= [A(\theta)] \{\bar{F}(0)\}^T - [A(\theta - \tilde{\theta})] \{\bar{P}(\tilde{\theta})\}^T u(\theta - \tilde{\theta}) \\ \{\bar{H}(\theta)\}^T &= [A(\theta)] \{\bar{H}(0)\}^T - [A(\theta - \tilde{\theta})] \{\bar{K}(\tilde{\theta})\}^T u(\theta - \tilde{\theta}) \\ &\quad + [B(\theta)] \{\bar{F}(0)\}^T - [B(\theta - \tilde{\theta})] \{\bar{P}(\tilde{\theta})\}^T u(\theta - \tilde{\theta}) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $[A]$ 、 $[B]$ は軸線の形状に関係した行列であり、 $u(\theta)$ は単位ステップ関数である。 T^* をせん断中心 (y_s, z_s) に関するトルクとすると、 $D = \frac{d}{d\theta}$ 、 $\mu^2 = R_0^2 G J_r (EC_w)^{-1}$ 、 $\lambda = R_0^3 (C_w)^{-1}$ 、 $\bar{y} = y_s R_0^{-1}$ 、 $\bar{z} = z_s R_0^{-1}$ 、 $\bar{\Psi} = R_0 \bar{\Psi}_x$ のような無次元化した量を用いれば、

$$\lambda \bar{T}^* = (D^2 - \mu^2) \bar{\Psi} = \lambda (\bar{T} - \bar{y} \bar{Q}_z^* + \bar{z} \bar{Q}_y^*) \quad \text{が成立する。さらに曲げねじり}$$

モーメントを $M_w = R_0^2 EC_w \bar{M}_w$ とすると $\bar{M}_w = D \bar{\Psi}$ が成立する。

以上の近似解法では、stress-strain 関係において τy を $(1 - \kappa y)^{-1}$ に対して無視するが、釣合式で $\frac{\tau}{E} (\approx 0.2)$ が考慮されている。

- 参考文献 (1) 小西一郎、小松定夫；薄肉曲線材の基礎理論 土木学会論文集 第87号
(2) 深沢泰晴；薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論 土木学会論文集 第110号
(3) R. Dabrowski；Zur Berechnung von gekrümmten Trägern mit offenem Profil Der Stahl Bau 1964