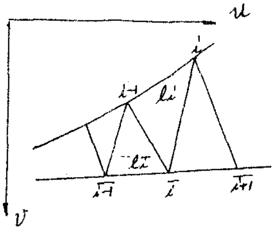
I－93　Reduction Method による特殊型式吊橋の解法

日本交通技術株式会社 正員 ○日置克幸　同　島[illegible]信一
〃　〃　里垣秀友　伊藤忠電子計算 志村安津子

吊橋の吊材がワーレン形に組まれているとき、その解法をあつかったものである。変形法によっても解けるが、長大吊橋になると未知数が多過ぎて電算の容量を超える事がある。そこでその未知数を減らすよう工夫したのである。右図のような座標をとる。



水平方向の変位を x_i, 鉛直方向の変位を y_i とする。

第二変形法による ij 部材の u 方向, v 方向の分力は次式で表される。

(1) $X_{ij} = (a_{ij}+k_{ij}b_{ij})(x_i-x_j) + C_{ij}(1-k_{ij})(y_i-y_j) - EA_{ij}\alpha_{ij}\varepsilon t$

(2) $Y_{ij} = C_{ij}(1-k_{ij})(x_i-x_j) + (b_{ij}+k_{ij}a_{ij})(y_i-y_j) - EA_{ij}\beta_{ij}\varepsilon t$

ここに $k_i = \dfrac{N_{ci}+N_i}{E_c A_{ci}}$　$a_i = \dfrac{EA_i(u_i-u_{i-1})^2}{l_i^3}$　$b_i = \dfrac{EA_i(v_i-v_{i-1})^2}{l_i^3}$

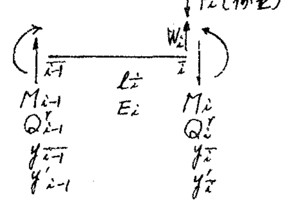
$C_i = \dfrac{EA_i(u_i-u_{i-1})(v_i-v_{i-1})}{l_i^3}$　$U_{ti} = E\varepsilon t(A_i\alpha_i - A_{i+1}\alpha_{i+1})$　$V_{ti} = E\varepsilon t(A_i\beta_i - A_{i+1}\beta_{i+1})$

i 点に関して力の釣合 ($\Sigma X = \Sigma Y = 0$) 式をたてる。

(3) $-(a_i+k_ib_i)x_{i-1} + (a_i+a_{i+1}+k_ib_i+k_{i+1}b_{i+1}+\sum_{\bar i} a_{i\bar i})x_i - (a_{i+1}+k_{i+1}b_{i+1})x_{i+1} - C_i(1-k_i)y_{i-1}$
$+ (C_i+C_{i+1}-k_iC_i-k_{i+1}C_{i+1}+\sum_{\bar i} C_{i\bar i})y_i - C_{i+1}(1-k_{i+1})y_{i+1} - \sum C_{i\bar i}y_{\bar i} - \sum a_{i\bar i}x_{\bar i} = U_{ti}$

(4) $-C_i(1-k_i)x_{i-1} + (C_i+C_{i+1}-k_iC_i-k_{i+1}C_{i+1}+\sum_{\bar i} C_{i\bar i})x_i - C_{i+1}(1-k_{i+1})x_{i+1} - (b_i+k_ia_i)y_{i-1}$
$+ (b_i+b_{i+1}+k_ia_i+k_{i+1}a_{i+1}+\sum_{\bar i} b_{i\bar i})y_i - (b_{i+1}+k_{i+1}a_{i+1})y_{i+1} - \sum_{\bar i} b_{i\bar i}y_{\bar i} - \sum C_{i\bar i}x_{\bar i} = V_{ti}$

右図のような補剛桁の釣合を考える。



$y_{\bar i} = -\dfrac{l_{\bar i}^3}{6f_i}Q^r_{i-1} - \dfrac{l_{\bar i}^2}{2f_i}M_{i-1} + l_{\bar i}y'_{\overline{i-1}} + y_{\overline{i-1}}$

$y'_{\bar i} = -\dfrac{l_{\bar i}^2}{2f_i}Q^r_{i-1} - \dfrac{l_{\bar i}}{f_i}M_{i-1} + y'_{\overline{i-1}}$

(5)

$M_i = l_{\bar i}Q^r_{i-1} + M_{i-1}$　　$E_sI_i = f_i$

$Q^l_i = W_i - P_i + Q^r_{i-1}$　　W_i ; 吊材の鉛直張力

$W_i = -C_{i-1\bar i}x_{i-1} + b_{i-1\bar i}(y_{\bar i}-y_{i-1}) - C_{i\bar i}x_i + b_{i\bar i}(y_{\bar i}-y_i)$

(3), (4)式を x_{i+1}, y_{i+1} について2元一次連立方程式を解き (5)式を代入し、マトリックス表示すると次ページのようになる。　各要素の値は次のようである。

$a_{33}=1$, $a_{34}=l_{\bar i}$　$a_{35}=-l_{\bar i}^2/2f_i$　$a_{36}=-l_{\bar i}^3/6f_i$　$a_{44}=1$. $a_{45}=-l_{\bar i}/f_i$　$a_{46}=-l_{\bar i}^2/2f_i$

$a_{55}=1$　$a_{56}=l_{\bar i}$　$a_{61}=-C_{i-1\bar i}$　$a_{62}=-b_{i-1\bar i}$　$a_{63}=b_{i-1\bar i}+b_{i\bar i}$　$a_{64}=b_{i-1\bar i}l_{\bar i}+b_{i\bar i}l_{\bar i}$

$a_{64}=b_{i-1\bar i}l_{\bar i}+b_{i\bar i}l_{\bar i}$　$a_{65}=-b_{i-1\bar i}l_{\bar i}/2f_i - b_{i\bar i}l_{\bar i}^2/2f_i$　$a_{65}=-b_{i-1\bar i}l_{\bar i}^2/2f_i - b_{i\bar i}l_{\bar i}^2/2f_i$

$a_{66}=1-b_{i-1\bar i}l_{\bar i}^3/6f_i - b_{i\bar i}l_{\bar i}^3/6f_i$　$a_{67}=-C_{i\bar i}$　etc　$a_{71}\sim a_{89}$ については省略する。

$$
(6)\quad
\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ y_{\bar{n}} \\ y'_{\bar{n}} \\ M_n \\ Q_n^r \\ x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} & 0 & 0 & 0 \\
a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\
a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\
a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ y_{\overline{n-1}} \\ y'_{\overline{n-1}} \\ M_{n-1} \\ Q_{n-1}^r \\ x_n \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix}
$$

(6)式を $[X_i]=[A_i][X_{i-1}]$ で表す。(6)式は9×9のマトリクスを含んでいる。これより、i点の応力及び変位は、$i-1$点の応力及び変位で表される事になる。

これを順に追ってゆくと、i点の応力及び変位は、0点のそれで表される。

境界条件として $x_0=y_0=0$、$M_0=y_{\bar{0}}=0$ と置くと、初期マトリクスは9×5のマトリクスで表せる事になる。結局任意点 i は未知数 $x_1, y_1, y'_{\bar{0}}, Q_0^r$ を含む9×5のマトリクス $[X_i]=[R_i][X_0]$ で表せる。中間支点条件として、いろいろ考えられる。(a) 単純支持 $y_i=y_{\bar{i}}=M=0$，(b) 連続支持 $y_i=y_{\bar{i}}=0$，(c) 支持なし $y_i=0$ (d) 弾性支持 $y_i=0$ $Ky_{\bar{i}}=Q_i^r-Q_i^r$

このうち(b)の連続支持について書くと支点で次のような変換をやる。

$$
(7)\quad
\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ y_{\bar{i}} \\ y'_{\bar{i}} \\ M_n \\ Q_n^r \\ x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
R_{71}+(R_{72}R_{24}R_{31}-R_{72}R_{21}R_{34}+R_{74}R_{21}R_{32}-R_{74}R_{22}R_{31})/\Delta, & 0, & R_{73}+\cdots, & 0, & R_{75}+\cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
R_{41}+(R_{42}R_{24}R_{31}-R_{42}R_{21}R_{34}+R_{44}R_{21}R_{32}-R_{44}R_{22}R_{31})/\Delta, & 0 & R_{43}+\cdots & ,0, & R_{45}+\cdots \\
\cdots & 0 & & ,0, & \cdots \\
0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\
b_{71}a_{01}+b_{74}R_{41}+b_{75}a_{61}+b_{77}a_{11}, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\
\cdots & \cdots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y'_{\bar{0}} \\ Q_{i+1}^r \\ x_1 \\ y_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix}
$$

b は $(i+1)$ の時のマトリクスのエレメントであり，$a_{01}=R_{11}+(R_{12}R_{24}R_{31}-R_{12}R_{21}R_{34}+R_{14}R_{21}R_{32}-R_{14}R_{22}R_{31})/\Delta$ などである。　$\Delta=R_{22}R_{34}-R_{24}R_{32}$

支点の変換により、未知数は $y'_{\bar{0}}, Q_0^r, x_1, y_1$ より $y'_{\bar{0}}, Q_{i+1}^r, x_1, y_{i+1}$ に代った事になる。このようにして，計算を中央点まで繰り返す。この時中央点において次のような連続条件がなりたつ。(')は逆の端支点より上述の計算をやった時の中央点のそれである。

(8) $x_n=-'x_{n+1}$　$y_n='y_{n+1}$　$M_n='M_{n+1}$，$y_{\bar{n}}='y_{\overline{n+1}}$　$Q_n=-'Q_n$，$\Sigma X_n=0$，$\Sigma Y_n=0$ $'y_{\bar{n}}='y_{\overline{n+1}}$

未知数は，$y'_{\bar{0}}$ Q_{i+1}^r x_1，y_{i+1}，$'y'_{\bar{0}}$，$'Q_{i+1}^r$ $'x_1$ $'y_{i+1}$ の8個であり，(8)式の8個の方程式を解く事によって，求められる。　Q_0^r，y_1 は中間支点条件より，求められる。

未知数が求まると　$[X_i]=[R_i][X_0]$ の式を用いて，各点の変位，及び応力は求められる

参考文献　第11回橋梁構造工学研究発表会　後藤茂夫著　不規則骨格を有する吊材の解法