I−90　たわみ影響線マトリックスによる吊橋の解析について

神戸市調査室　○正会員　島田春十郎
三菱重工KK神戸造船所　正会員　糸長　泰

1　はしがき

吊橋の設計計算は Steinman や Peery の解法に代表される Deflection Theory で行なわれているが、その着想は非常にすぐれており、吊橋を張力ばりにおきかえて曲げモーメント、せん断力、たわみ等が、すべて微分方程式から出発した簡易な数式で表わされるので、電子計算機による数値計算も容易である。上記の方法では、ケーブルの水平張力が解析の重要な Factor になるのであるが、実際に補剛桁に作用するのは活荷重と吊材の不静定上揚力群だけである。

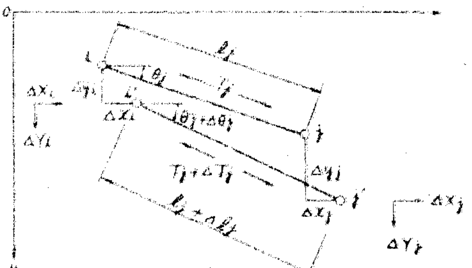
そこで著者らは、その不静定吊材力を直接未知数において解を求めようと試みた。ここでは活荷重載荷時と温度変化のみを対象とし、基本系では非常に大きな初期張力によって平衡状態を保持しているものと考える。この初期張力と強制的な平衡状態を考慮する点は、通常の平面構造系理論と解析条件を異にしている。

本法の特色は Free Cable と補剛桁のたわみ影響線マトリックスをそれぞれ独立して求め、両者の関連において吊材力を求めることにあり、解析は初期張力を仮定する限りにおいて、すべて線型方程式として取扱うことができる。なお、本法では補剛桁の構造が連続、非連続あるいは等、不等断面のいずれの場合にも容易に解析できるという利点を有している。

本文では、解析方法を述べるとともに、設計条件を仮定し、数値計算を行なったので、これらを報告したい。

2　初期張力を有する Free Cable の解析

初期張力 T_i によって平衡している Cable Element ij に外力 $(\Delta X_i, \Delta Y_i)$ および $(\Delta X_j, \Delta Y_j)$ が作用して、材端はそれぞれ $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ および $(\Delta x_j, \Delta y_j)$ なる変位を生じたものとする。（図−1）

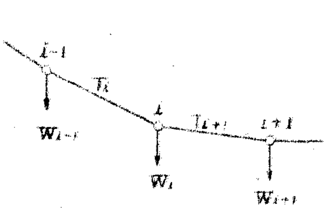


図−1

初期張力 T は図−2に示すように初期死荷重 W に起因するものとすれば、i 点についての平衡方程式はつぎのようになる。

$$(T_i+\Delta T_i)\cos(\theta_i+\Delta\theta_i)=(T_{i+1}+\Delta T_{i+1})\cos(\theta_{i+1}+\Delta\theta_{i+1})+\Delta X_i \quad \cdots\cdots(1)$$

$$(T_i+\Delta T_i)\sin(\theta_i+\Delta\theta_i)=(T_{i+1}+\Delta T_{i+1})\sin(\theta_{i+1}+\Delta\theta_{i+1})+W_i+\Delta Y_i \quad \cdots\cdots(2)$$



図−2

ここに、

$$\cos(\theta_i+\Delta\theta_i)=\left\{(x_i+\Delta x_i)-(x_{i-1}+\Delta x_{i-1})\right\}/(l_i+\Delta l_i) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\sin(\theta_i+\Delta\theta_i)=\left\{(y_i+\Delta y_i)-(y_{i-1}+\Delta y_{i-1})\right\}/(l_i+\Delta l_i) \quad \cdots\cdots(4)$$

幾何学的な関係から、

$$\Delta l_i=\left\{(\Delta x_i-\Delta x_{i-1})(x_i-x_{i-1})\right\}/l_i+\left\{(\Delta y_i-\Delta y_{i-1})(y_i-y_{i-1})\right\}/l_i \quad \cdots\cdots(5)$$

ケーブルの断面積を A、ヤング率を E とおけば

$$\Delta T_i=(AE/l_i)\Delta l_i \quad \cdots\cdots(6)$$

いま　定数をつぎのように規定する。

$\bar{z}_i = T_i / \ell_i$ --------------------------------(7), $F_i = \{(x_i - x_{i-1})^2 (AE - T_i)\} / \ell_i^3$ -------------(8)

$G_i = \{(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})(AE - T_i)\} / \ell_i^3$ -----(9), $H_i = \{(y_i - y_{i-1})^2 (AE - T_i)\} / \ell_i^3$ -------------(10)

ケーブルは初期の釣合い状態では　つぎのような関係にある

$T_i (x_i - x_{i-1}) / \ell_i = T_{i+1} (x_{i+1} - x_i) / \ell_{i+1}$ ----(11), $T_i (y_i - y_{i-1}) / \ell_i = T_{i+1} (y_{i+1} - y_i) / \ell_i + W_i$ -----(12)

式(3), (4)において　近似的に $1/(\ell + \Delta\ell) \fallingdotseq (1 - \Delta\ell/\ell)/\ell$ -----------(13)とおく。

式(3)～(13)を用いて，式(1), (2)を変形し，2次以上の微小量を省略すると，つぎのような式を得る。

$$-(\bar{z}_i + F_i)\Delta x_{i-1} + (\bar{z}_i + F_i + \bar{z}_{i+1} + F_{i+1})\Delta x_i - (\bar{z}_{i+1} + F_{i+1})\Delta x_{i+1} - G_i \Delta y_{i-1} + (G_i + G_{i+1})\Delta y_i - G_{i+1} \Delta y_{i+1} = \Delta X_i \quad \text{-----(14)}$$

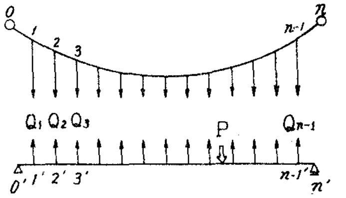
$$-G_i \Delta x_{i-1} + (G_i + G_{i+1})\Delta x_i - G_{i+1} \Delta x_{i+1} = (\bar{z}_i + H_i)\Delta y_{i-1} + (\bar{z}_i + H_i + \bar{z}_{i+1} + H_{i+1})\Delta y_i - (\bar{z}_{i+1} + H_{i+1})\Delta y_{i+1} = \Delta Y_i \quad \text{-----(15)}$$

支承条件は端部固定端において，　$\Delta x = 0$,　$\Delta y = 0$ ---------------(16)

中間部で Flexible なタワーに支持されている場合は，　$\Delta y = 0$ ------(17)

式(16), (17)の支承条件を考慮し，式(14), (15)を順次配列していくこと，ケーブの方程式が得られる。

3. 活荷重作用時における吊橋の解析



図－3

補剛桁の任意点に活荷重Pが載荷されたとき，吊材には不静定力Qを生じてケーブルに応力が伝達される。いま，吊材自身の変形はケーブルおよび補剛桁のそれに比して非常に小さいとして無視することにすると，ケーブルの i 点とそれに対応する補剛桁の i' 点の最終的な変位は相等しい関係にある。ケーブルの i 点に単位力が作用したときの i 点のたわみを u_{ij} にて表わし，補剛桁の j' 点に単位載荷したときの i' 点のたわみを $v_{i'j'}$ にて表わすことにすると，図－3におけるケーブルの i 点および i' 点のたわみはつぎのようになる。

$$\delta_i = u_{i1} Q_1 + u_{i2} Q_2 + \cdots\cdots + u_{in-1} Q_{n-1} \quad \text{---------(18)}$$

$$\delta_{i'} = \delta_{i'P} - (v_{i'1'} Q_1 + v_{i'2'} Q_2 + \cdots\cdots + v_{i'n-1'} Q_{n-1}) \quad \text{---------(19)}$$

ここに，$\delta_i = \delta_{i'}$ ---------------(20)

一般に，吊材力Qによるケーブルのたわみを δ_Q，Qによる補剛桁の上方変位を $\bar{\delta}_Q$，活荷重Pによる補剛桁のたわみを δ_P とおけば，式(20)はつぎのように表わされる。

$$\delta_Q + \bar{\delta}_Q = \delta_P \quad \text{---------------(21)}$$

式(21)を格点番号順に配列すると，つぎのような1次方程式を得ることができる。

$$[U+V][Q] = [\delta\ ] \quad \text{-----------(22)}$$

ここに

$$[U+V] = \begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11})(u_{12}+v_{12}) & \cdots\cdots & (u_{1n-1}+v_{1n-1}) \\ (u_{21}+v_{21})(u_{22}+v_{22}) & \cdots\cdots & (u_{2n-1}+v_{2n-1}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (u_{n-11}+v_{n-11})(u_{n-12}+v_{n-12}) & \cdots & (u_{n-1n-1}+v_{n-1n-1}) \end{bmatrix} \text{--- (23)},\ [Q] = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ Q_{n-1} \end{bmatrix} \text{--- (24)},\ [\delta_P] = \begin{bmatrix} \delta_{1P} \\ \delta_{2P} \\ \cdots \\ \delta_{n-1P} \end{bmatrix} \text{---- (25)}$$

吊材力[Q]が求まると，補剛桁の曲げモーメント，セン断力，たわみ，たわみ角等はすべて単純ば

りまたは連続ばりに，活荷重Ｐおよび吊材力Ｑが作用したものとして簡単に求めることができる。

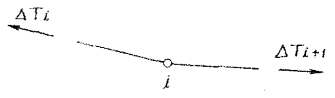
静定系において，活荷重Ｐによる補剛桁の曲げモーメント，セン断力，たわみ，たわみ角をそれぞれ$[M_P]$，$[S_P]$，$[\bar{S}_P]$，$[L_P]$とおき，またそれらの断面量の影響線マトリックスを$[M_0]$，$[S_0]$，$[\bar{S}_0]$，$[L_0]$とおけば，断面量はつぎのように表わすことができる。

$$[M]=[M_P]-[M_0][Q] \quad\text{------------}(26) \qquad [S]=[S_P]-[S_0][Q] \quad\text{------------}(27)$$

$$[\bar{S}]=[\bar{S}_P]-[\bar{S}_0][Q] \quad\text{------------}(28) \qquad [L]=[L_P]-[L_0][Q] \quad\text{------------}(29)$$

4. 温度変化の影響

まず，ケーブルの各格点を固定して考えると Cable Element に温度変化による軸力を生じ，これが外力として格点に作用する。i点に作用する外力はつぎのようになる。



図－4

$$\Delta X_t=\Delta T_{i+1}\cos\theta_{i+1}-\Delta T_i\cos\theta_i \quad\text{----------}(30)$$

$$\Delta Y_t=\Delta T_{i+1}\sin\theta_{i+1}-\Delta T_i\sin\theta_i \quad\text{----------}(31)$$

ケーブルの膨張係数をα，温度変化をΔtとすれば　$T_i=AE\alpha\Delta t$ ------------(32)

したがって式(30)，(31)は，

$$\Delta X_t=AE\alpha\Delta t\{(x_{i+1}-x_i)/l_{i+1}-(x_i-x_{i-1})/l_i\} \quad\text{----------}(33)$$

$$\Delta Y_t=AE\alpha\Delta t\{(y_{i+1}-y_i)/l_{i+1}-(y_i-y_{i-1})/l_i\} \quad\text{----------}(34)$$

式(33)，(34)を式(14)，(15)に代入してケーブルの変位$(\Delta x_t, \Delta y_t)$を求める。この場合もΔx_tの影響を無視してΔy_tを荷重項として取扱う。すなわち　$\delta_t=\Delta y_t$ ------------(35)

吊材が存在しない場合はケーブルがΔy_tだけ変位するのであるが，補剛桁がそれに抵抗して吊材力Q_tを生ずる。吊材力Q_tによるケーブルおよび補剛桁の変位をそれぞれδ_{Qt}および$\bar{\delta}_{Qt}$とおけば，式(21)と同様にして，つぎのような関係式が得られる。　$\delta_{Qt}+\bar{\delta}_{Qt}=\delta_t$ ----------(36)

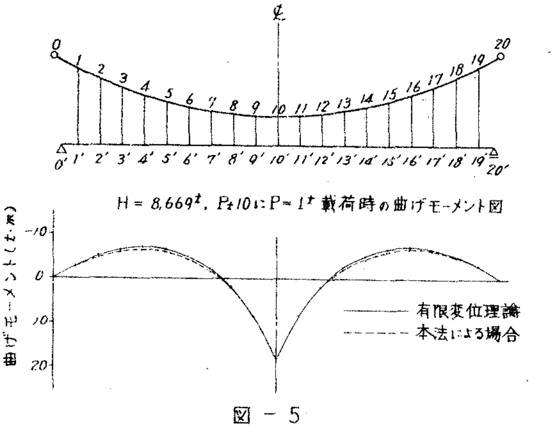
これが温度変化時における吊橋の方程式である。

5. 計　算　例

本法を用いて，つぎに示す諸条件によって曲げモーメントを計算した結果は図－5に示したとおりである。同図には比較のため，有限変位理論によって求めた結果を併記したが，本法の結果は負の領域の1部を除いて差異のない良好な値を得た。なお，使用した電子計算機はIBM 7044 型である。

設　計　条　件

ケーブル支間	508.0 m	ケーブル断面 AE	3.819×10^6 t
補剛桁の支間	500.0 m	補　剛　桁　ET	2.3625×10^7 t
ケーブルサグ	40.0 m	死荷重強度	10.75 t/m



図－5

6. む　す　び

数値計算の結果からもわかるように，有限変位理論とほとんど差異がない。今後，補剛桁が連続構造，不等断面構造または，斜吊構造のケースについて，本法の有利性を研究していきた