

東京大学工学部 正員 平井 敦
山梨大学工学部 正員 O 深沢 泰晴

1. はじめに

風荷重による吊橋補剛桁のねじれ座屈の現象は、風圧に時間的周期性が存在する場合には、更に動的な弾性不安定現象へと発展していく。ここでは変動風の有する卓越周期の特性に特に着目して、このいわゆる Parametric Instability の見地から、風力によって誘起される吊橋補剛桁の連成振動をとらえてみる。風速の上昇に伴ない消長を繰り返すという吊橋の風に対する連成振動の特性は、Parametric Vibration における断続的に存在する不安定領域と密接な関連があると考えられる。

自然風の卓越周期に関する資料はまだ入手していないので、以下単に理論的な解析結果を示すと共に、試算設計の長径向吊橋に対する数値計算結果に基づき、不安定領域についての2, 3の検討を行なうにとどめ、結論的判断は後日にゆづる。なお、吊橋の振動問題のこの種の取り扱いについては、V. V. Bolotin も若干の言及を試みている。

2. 風力による連成振動の基礎方程式

空気力が吊橋補剛桁に与える空気力学的抗力 W , 揚力 L , トルク T をそれぞれ

$$W = C_a p b, \quad L = C_l p b = s p b \varphi, \quad T = C_m p b^2 = s_c p b^2 \varphi \quad (1)$$

で表わすと、風力による吊橋の連成振動の弾性方程式は次式で与えられる、¹⁾

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - 2H \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M \varphi) - s p b \varphi &= 0 \\ m I^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + E C_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - (GK + \frac{1}{2} H b^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - (s_c + \frac{1}{2} C_a) p b^2 \varphi + M \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、減衰、相対仰角、位相差の影響は無視しており、またカルマン渦等の強制外力の効果も無視した。抗力による補剛桁の水平面内の曲げモーメント M は、風力がスパン全長にわたって等分布しているとし、更にケーブルの負担分を無視すると

$$M = \frac{1}{2} C_a p b z (l - z)$$

さて、風圧の時間的周期性と円振動数 θ の調和振動と仮定して、動圧 $p = \frac{1}{2} \rho V^2$ に対し

$$p = p_0 + p_1 \cos \theta t \quad \text{したがって} \quad M = \frac{1}{2} C_a b z (l - z) (p_0 + p_1 \cos \theta t) \quad (3)$$

ここで、逆対称振動に対して

$$u(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{2k\pi}{l} z, \quad \varphi(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \sin \frac{2k\pi}{l} z \quad (4)$$

とおき、Galerkin の方法を適用すると、式(2)は支配的な $k=1$ に対して、次のように Mathieu の連立式となり、Parametric Vibration のこの場合の基本式を与えることになる、

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + EJ \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 u(t) - b \left\{ C_a \left(\frac{\pi^2}{4} + s \right) \right\} (p_0 + p_1 \cos \theta t) z(t) &= 0 \\ m I^2 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \left\{ GK + E C_w \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} H b^2 \right\} \varphi(t) - C_a b \left(\frac{\pi^2}{4} + s \right) (p_0 + p_1 \cos \theta t) u(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 $EJ = EI + \frac{H}{2} \left(\frac{l}{2\pi} \right)^2$, $GK = GK + E C_w \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} H b^2$. なお、式(5)をマトリックス表示

で表わすと,
$$\mathbf{F} \frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2} + [\mathbf{R} - (p_0 + p_2 \cos \theta t) \mathbf{S}] \mathbf{f} = 0 \quad (5')$$

ここに, $\mathbf{F} = m \begin{bmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} EJ(\frac{2\pi}{l})^4, & 0 \\ 0, & GK(\frac{2\pi}{l})^2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0, & C_d b(\frac{2\pi}{l} + s)b \\ C_d b(\frac{2\pi}{l} + s)b, & b^2(s + \frac{1}{2}C_d) \end{bmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{V}(t) \end{bmatrix}$

3. Parametric Vibration の不安定領域の決定

まず定常風圧によるねじれ座屈の方程式はこの場合には, 限界動圧を p_k とすれば式(5')より

$$|\mathbf{R} - p_k \mathbf{S}| = 0 \quad \text{すなわち,} \quad \begin{vmatrix} EJ(\frac{2\pi}{l})^4 & -p_k b[C_d(\frac{2\pi}{l} + s)b] \\ -p_k bC_d(\frac{2\pi}{l} + s)b & GK(\frac{2\pi}{l})^2 - p_k b^2(s + \frac{1}{2}C_d) \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

これは著者の一人平井がすでに与えたものに対応する。

また定常風圧(p)を受けている場合の逆対称の基本固有円振動数 ω も式(5')より明らかのように次式から求められる,

$$|\mathbf{R} - p \mathbf{S} - \omega^2 \mathbf{F}| = 0 \quad (7)$$

次に, 基本式(5')より Parametric Vibration における第一不安定領域の境界線の方程式として近似的に次式を誘導することができる。²⁾

$$|\mathbf{R} - (p_0 \pm \frac{1}{2}p_2) \mathbf{S} - \frac{1}{4}\theta^2 \mathbf{F}| = 0 \quad (8)$$

第二以上の不安定領域の境界線の方程式については紙面の都合上省略する。

4. 試算設計吊橋に対する検討

日本交通技術(株)による試算設計の長大吊橋を対象にして検討する。主な力学量は次の通り,

$$l = 1500^m, b = 33.0^m$$

$$h = 12.0^m, w = 15.5^m$$

$$H_w = 2.91 \times 10^4 \text{ t}$$

$$EI = 1.43 \times 10^{10} \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

$$GK = 5.69 \times 10^9 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

$$m = 3.16 \frac{\text{t} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}, m l^2 = 499 \text{ t} \cdot \text{s}^2$$

図-1 は定常風の風速

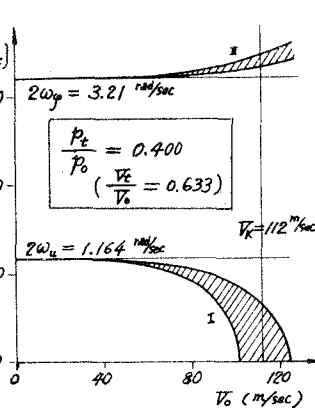


図-2 定常風圧と不安定領域との関係

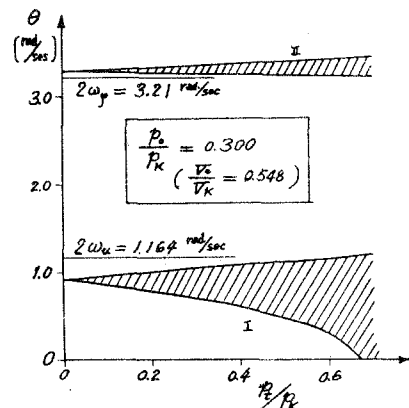


図-3 変動風圧と不安定領域との関係

増大に伴う連成逆対称基本円振動数の低下の様子を示している。図-2 は定常風圧と変動風圧との一定比における第一不安定域の生成状態を変動風の振動数と風速との関係において示す。図-3 には定常風圧の一定値に対し, 変動風の振動数と風圧が第一不安定域に及ぼす影響を示した。これらの計算においては空気力学的定数としては仮に $C_d = 0.3$, $s = 0.7$, $s_0 = 0$ を選んでいる。

文献 1) 平井敦: 鋼橋Ⅲ, 2) V.V. Bolotin: The Dynamic Stability of Elastic System.