I－71　　横荷重を受ける部材に対する弾塑性座屈の近似解法

九州大学　工学部　正　員　山崎徳也
〃　　　大学院　学生員○速水昭正

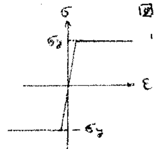
序言　横荷重をうけ軸方向に圧縮される部材の座屈強度は降伏ヒンジの形成により決定される場合と，降伏ヒンジになる前に耐荷力が減少するいはゆる限界軸荷重によって決定される場合とに分かれる。後者の場合，Ježek[1]が既に十分な精度を有する近似解を与えているが，横荷重と軸荷重の比が一定であるという仮定が含まれており一般性に欠ける難点が残存している。したがって著者等は実際的な問題を包含しうるごとく一般化し任意の横荷重が限界軸荷重に及ぼす影響をたわみ曲線を仮定することにより近似的に計算し，又これを図表化すれば実用にも供しうることを示した。

なお本研究では次の仮定を採用した。

(a) 材料は完全弾塑性体とし応力－歪線は図－1で表わされるものとする。

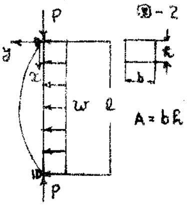
(b) 一様矩形断面直線材を取扱うものとする。

図－1



I．基本的考察　図－2に示す矩形断面の単純支持部材が等分布横荷重 w 及び軸荷重 $P = bh\sigma_0$ を受ける場合について考察すれば，中央点の応力状態は，純弾性応力状態，および圧縮縁応力 σ_1 のみが降伏した弾塑性応力状態A，ならびに引張縁応力 σ_2 も降伏した弾塑性応力状態Bの三種類に区別される。限界軸応力は弾性応力状態では存在しないことが分っているので以下においては弾塑性応力状態A，Bについてのみ考えることにする。各応力状態に対する中央点の曲率 $1/\rho_m$ と曲げモーメント M_m の関係は以下の如くである。

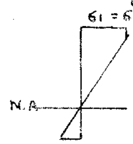
図－2



A = bh

(1) 応力状態A（$\sigma_1 = \sigma_y$，$\sigma_2 < \sigma_y$　図－3参照）

図－3



内力と外力の釣合より　$\int_A \sigma \, dA = P$，　$\int_A \sigma u \, dA = M$　　(1)

式(1)より

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{8(\sigma_y - \sigma_0)^3}{9Eh\left[(\sigma_y - \sigma_0) \quad 2M_m/bh^2\right]^2} \qquad (2)$$

ただし $M_m = P y_m + wl^2/8$，応力状態Aと応力状態Bの限界のたわみは　$y_I = \frac{h}{6}\left\{\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0} - 1\right)\left(\frac{2\sigma_0}{\sigma_y} + 1\right) - \frac{f\sigma_y}{\sigma_0}\right\}$

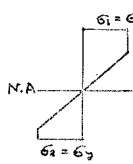
ここに $f = w/w_y$，$w_y = 16b\sigma_y/\lambda^2$（等分布横荷重のみにより部材の中央点が降伏するときの荷重）

(2) 応力状態B（$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y$，図－4参照）

式(1)より

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\sigma_y}{Eh\sqrt{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_y^2}\right) - \frac{3M_m}{bh^2\sigma_y}}} \qquad (3)$$

図－4

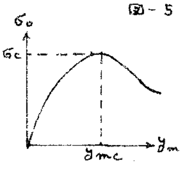


この応力状態において可能な最大のたわみ y_{II} は

$$y_{II} = \frac{h}{4}\left\{\left(1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_y}\right)\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0} - 1\right) - \frac{2f\sigma_y}{3\sigma_0}\right\}$$

II．限界軸応力　　軸線のたわみ形を式(4)のごとく境界条件を満足する正弦函数で近似すれば式(2)および式(3)を用いることにより中央点のたわみ y_m と軸応力 σ_0 の関係式がA，B両応力状態に対して求まりこの曲線のグラフ（図－5参照）によると，y_m がある限界値 y_{mc} に達するとそれ以後，軸応力はたわみの増加に対して逆に減少することがみとめられ，このときの最大軸応力 σ_c が限界軸応力であり理論的には　$d\sigma_0 / dy_m = 0$　により

図－5



決定することができる。　軸線のたわみ　$y = y_m \sin \pi x / l$　(4)

中央点の曲率　$1/\rho_m = -\pi^2 y_m / l^2$　(5)

(1)応力状態A　式(2)と式(5)より中央点のたわみと曲率との関係式は

$$9Ey_m\left[\frac{h}{2}\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0}-1\right)-y_m-\frac{fh}{6}\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0}\right)\right]^2-2\sigma_0 h\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0}-1\right)\frac{l^2}{\pi^2}=0 \qquad (6)$$

限界軸応力およびその時のたわみ y_{mc} は $d\sigma_0/dy_m=0$ より次式で与えられる。

$$\lambda^2=\frac{E\pi^2}{6\sigma_y g_c}\left[\frac{1-g_c-f/3}{1-g_c}\right] \cdots (7) \qquad y_{mc}=\frac{h}{6g_c}\left[1-g_c-\frac{f}{3}\right]\cdots(8)$$

ここに $\lambda=2\sqrt{3}\,l/h$：細長比，$g_c=\sigma_c/\sigma_y$，　y_{mc} は　$0<y_{mc}<y_I$　の条件を満足せねばならぬので，いま $\left.\begin{matrix}g_1\\g_2\end{matrix}\right\}=0.5\left\{1\pm\sqrt{1-\frac{4f}{3}}\right\}$ とおくと式(7)の適用範囲は　$g_1 \leqq g_c \leqq g_2$　ただし　$0\leqq f\leqq 3/4$。

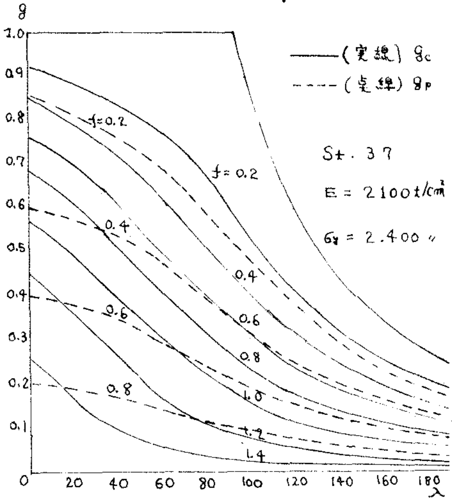
(2)応力状態B　式(3)と式(5)より

$$y_m\sqrt{\frac{\sigma_y}{4\sigma_0}\left(1-\frac{\sigma_0^2}{\sigma_y^2}\right)h-y_m-\frac{f}{6}\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0}\right)}\,h-\frac{l^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\sigma_y^3}{3Eh^2\sigma_0}}=0 \qquad (9)$$

限界軸応力およびその時のたわみ y_{mc} は $d\sigma_0/dy_m=0$ より次式で与えられる。

$$\lambda^2=\frac{E\pi^2}{g_c\sigma_y}\sqrt{\left(1-g_c^2-\frac{2f}{3}\right)^3}\cdots(10)\qquad y_{mc}=\frac{h}{6g_c}\left[1-g_c^2-\frac{2f}{3}\right]\cdots(11)$$

y_{mc} は　$y_I<y_{mc}<y_{II}$　の条件を満足すべきであるので，いま　$g_3=\sqrt{1-2f/3}$　とおくと式(10)の適用範囲は　$0\leqq g_c\leqq g_1$　および　$g_2\leqq g_c\leqq g_3$，ただし　$0\leqq f\leqq 1.5$。　なお　$\frac{3}{4}\leqq f$ の場合には，応力状態は常にBとなり式(7)に代って式(10)が適用される。



Ⅲ．降伏軸応力　部材の最大縁応力が降伏するときのいわゆる降伏軸応力 σ_P は　$P/A+M_m/W=\sigma_y$ (W：断面係数)より結果のみを示せば次式となる。

$$\lambda=2\sqrt{\frac{E}{g_P\sigma_y}}\,\mathrm{SEC}^{-1}\frac{1-g_P}{f}\qquad (g_P=\sigma_P/\sigma_y)$$

結語　以上により等分布横荷重が部材の座屈強度に及ぼす影響を求めることができたが，式(7)，式(10)から，与えられた細長比に対して直接限界軸応力を求めることは困難であるゆえ，逆に限界軸応力をパラメーターとして細長比の値を計算し図表化しておけば使用に便利であり，図－6はSt.37に対する結果を示すものである。中央点に単一横荷重Qが加わる場合も全く同じ方法で解くことができ，式(7)，式(10)において f を Q/Q_y（$Q_y=4bh\sigma_y/\sqrt{3}\lambda$）とおけばよい。両端固定の場合は，座屈長さを近似的に $l/2$ とおけば，スパン $l/2$ の単純支持部材を解く場合に一致する。なお本法では，横荷重および軸圧縮力をうける部材の座屈強度を限界軸荷重によってのみ考慮しているが，実際には横荷重が相当大きく細長比が小さい場合には降伏ヒンジの形成により破壊することがわかっており，このことも併せて考えるべきで，これについては目下考究中である。

文献　(1) K. Ježek "Näherung Berechnung der Tragkraft exzentrisch gedruckter Stahlstabe" Stahlbau 1935