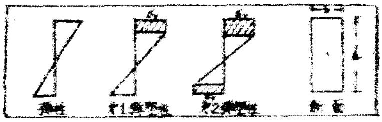
I−69　エネルギー法による山形ラーメンの弾塑性解析

九州大学工学部　正員　山崎徳也

〃　大学院　学生員○石川信隆

1．緒言　漸増曲げモーメントおよび軸力を受ける平面ラーメンの弾塑性状態を解明するため，著者らは先に弾塑性領域における曲げと軸力とを考慮した厳密補足歪エネルギー式[1]を導いたが，ここではこのエネルギー式に Complementary Minimum Principle を適用して不静定反力を算定するいわゆるエネルギー法を採用し，実際の矩形等断面をもつ山形ラーメンの弾塑性解析を行った。一般に山形ラーメンの弾塑性領域の発生状況ひいては崩壊過程は構造形式および荷重状態によって異なるが，本研究では脚を固定した2ヒンジ対称山形ラーメンに満載等分布荷重が載荷した場合の解法を例示する。なお座屈による影響は考慮しない。

2．解法　図−1に示すごとき弾性，才1弾塑性，才2弾塑性状態におけるそれぞれの応力分布を用いた厳密補足歪エネルギー式の誘導考察については既に発表[1]したので，ここでは結果のみを採用する。すなわち弾塑性領域における曲げと軸力とを考慮した矩形断面に対する補足歪エネルギーは次式で与えられる。



図−1

$$U = \int_E U_0\,ds + \int_{P_1} U_1\,ds + \int_{P_2} U_2\,ds \qquad \cdots (1)$$

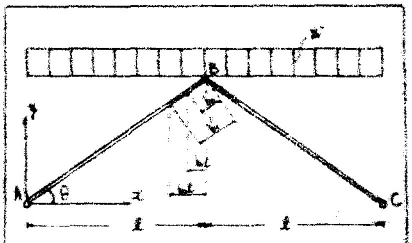
ここに U_0, U_1, U_2 はそれぞれ部材の単位長さ当りに貯えられる弾性，才1弾塑性，才2弾塑性領域における補足歪エネルギーで次式のごとく表わされ，また積分記号の添字 E, P_1, P_2 はそれぞれ部材の弾性，才1，才2弾塑性領域の長さを示す。

$$U_0 = \frac{M_y^2}{2EI}\left(\mathbf{M}^2 + 3\mathbf{N}^2\right), \quad U_1 = \frac{M_y^2}{2EI}\left[\frac{8(1-\mathbf{N})^3}{3(1-\mathbf{N})-\mathbf{M}} + 3(2\mathbf{N}-1)\right], \quad U_2 = \frac{M_y^2}{2EI}\left(3 - 2\sqrt{3-3\mathbf{N}^2-2\mathbf{M}}\right)$$

$\mathbf{M} = M/M_y$，$\mathbf{N} = N/N_y$，また $M_y(=bd^2\sigma_y/6)$ および $N_y(=bd\sigma_y)$ はそれぞれ降伏曲げモーメントおよび軸力，EI は曲げ剛性

(1)．中央に弾塑性領域が生ずる場合

図−2のごとく中央点Bより b_2'，ついで b_1' までそれぞれ才2および才1弾塑性領域が生ずるものとすれば，エネルギー式は式(1)より次式となる。



図−2

$$U = 2\left[\int_0^{s-b_1'} U_0\,ds + \int_{s-b_1'}^{s-b_2'} U_1\,ds + \int_{s-b_2'}^{s} U_2\,ds\right] \qquad \cdots (2)$$

一方任意点の曲げモーメントおよび軸力はそれぞれ次式のごとくである。

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M} &= K\{\mathbf{W}(\xi - \xi^2/2) - \mathbf{H}\tan\theta\,\xi\} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{W}(1-\xi)\sin\theta + \mathbf{H}\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad \cdots (3)$$

ここに $K = N_y l/M_y$，$\xi = x/l$，$\mathbf{H} = H/N_y$，$\mathbf{W} = wl/N_y$

さて水平反力Hを算定するため式(2)に式(3)を代入して Complementary Minimum Principle を適用すれば次式が得られる。

$$\frac{\partial U}{\partial H} = 2\left\{[F_0(\xi)]_0^{1-b_1} + [F_1(\xi)]_{1-b_1}^{1-b_2} + [F_2(\xi)]_{1-b_2}^{1}\right\} l\sec\theta = 0 \qquad \cdots (4)$$

ここに $b_1 = b_1'\cos\theta/l$，$b_2 = b_2'\cos\theta/l$，また $F_0(\xi), F_1(\xi), F_2(\xi)$ はそれぞれ次式で示される $\xi, \mathbf{H}, \mathbf{W}$ の函数である。

$$F_0(\xi) = \int\frac{\partial U_0}{\partial H}d\xi = \frac{M_y}{EI}\left[-\tan\theta\{\mathbf{W}(\xi^3/3 - \xi^4/8) - \mathbf{H}\tan\theta\,\xi^3/3\}K + 3\cos\theta\{\mathbf{W}\sin\theta(\xi - \xi^2/2) + \mathbf{H}\cos\theta\,\xi\}\right]$$

$$F_1(\xi) = \int\frac{\partial U_1}{\partial H}d\xi = \frac{M_y}{EI}\left[-4\tan\theta\{I_1(4,-2) - q\,I_1(3,-2)\}p^2 + 12\{I_2(3,-2) - I_2(2,-1) + 1/2\}\cos\theta\right]$$

$$F_2(\xi) = \int\frac{\partial U_2}{\partial H}d\xi = \frac{M_y}{EI}\left[-\tan\theta\{I_3(1,-1)\} + 3\cos\theta\{(\mathbf{W}\sin\theta + \mathbf{H}\cos\theta)I_3(0,-1) - \mathbf{W}\sin\theta\,I_3(1,-1)\}\right]$$

ただし I_1, I_2, I_3 はそれぞれ次に示す不定積分で容易に算定され，また諸係数の内容は表−1のごとくである。

$$I_1(m,n) = \int t^m(\alpha_1 t^2 + \beta_1 t + \gamma_1)^n dt, \quad t = \alpha_2\xi + \beta_2$$

$$I_2(m,n) = \int(p\xi + q)^m(\alpha_2\xi^2 + \beta_2\xi + \gamma_2)^n d\xi$$

$$I_3(m,n) = \int \xi^m(\alpha_3\xi^2 + \beta_3\xi + \gamma_3)^n d\xi$$

表−1

α_1	$K\mathbf{W}/2$	β_1	[illegible]	γ_1	[illegible]
α_2	$K\mathbf{W}/2$	β_2	[illegible]	γ_2	[illegible]
α_3	[illegible]	β_3	$2K(\mathbf{H}\tan\theta - \mathbf{W})$	γ_3	[illegible]
p	$\mathbf{W}\sin\theta$	q	[illegible]		[illegible]

すなわち水平反力Hは式(4)を満足するごとく逐次近似法を用いて数値的に算定するわけで，オ1次近似値として弾塑性領域の発生しない弾性時の値をとる。すなわち式(4)に$b_1 = b_2 = 0$を代入して次値をうる。

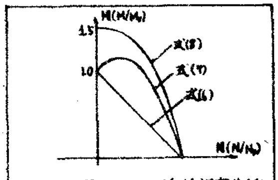
$$H = \frac{5\tan\theta/24 - 3\sin\theta\cos\theta/K^2}{\tan^2\theta/3 + 3\cos^2\theta/K^2}\,\overline{W} \qquad \cdots \quad (5)$$

さらにオ1およびオ2弾塑性領域未知数b_1およびb_2に対しては弾塑性境界条件[2]としての次の式(6)および式(7)にそれぞれ式(3)を代入して算定可能となる。

弾性とオ1弾塑性との境界 ： $|M| = 1 - N$ $\cdots$ (6)

オ1弾塑性とオ2弾塑性との境界 ： $|M| = 1 + N - 2N^2$ $\cdots$ (7)

なお オ2弾塑性の極限としての完全塑性条件： $|M| = 1.5(1 - N^2)$ $\cdots$ (8)



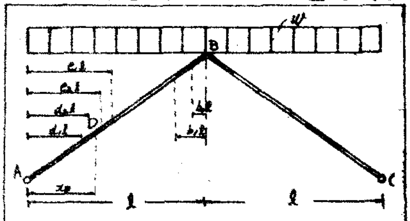
図－3 M-N相関曲線

一方中央点Bのたわみを求めるにはB点に仮想荷重Pを作用させて次式にて決定される。

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = 2\left\{\left[D_0(\xi)\right]_0^{1-b_1} + \left[D_1(\xi)\right]_{1-b_1}^{1-b_2} + \left[D_2(\xi)\right]_{1-b_2}^{1}\right\} l \sec\theta \quad \cdots \quad (9)$$

ここに$D_0(\xi)$, $D_1(\xi)$, $D_2(\xi)$は式(4)の$F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$中の係数$-\tan\theta$および$\cos\theta$の代りにそれぞれ1/2および$\sin\theta/2$を置換したものと合致し，したがって水平反力さえ求まれば弾塑性たわみは容易に算定される。

(2). 引き続きD点にも弾塑性領域が生ずる場合（図－4参照）



図－4

(1)と同様 水平反力HはD点近傍の弾塑性領域を式(1)に導入したうえで，Complementery Minimum Principleを適用し，式(10)を満足するごとく試算により算定するが，この場合のオ1次近似値として式(4)で求めた値を採用する。

$$\frac{\partial U}{\partial H} = 2\left\{\left[F_0(\xi)\right]_0^{d_1} + \left[F_1(\xi)\right]_{d_1}^{d_2} + \left[F_2(\xi)\right]_{d_2}^{e_2} + \left[F_1(\xi)\right]_{e_2}^{e_1} + \left[F_0(\xi)\right]_{e_1}^{1-b_1} + \left[F_1(\xi)\right]_{1-b_1}^{1-b_2} + \left[F_2(\xi)\right]_{1-b_2}^{1}\right\} l \sec\theta = 0 \quad \cdots \quad (10)$$

ここに$F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$は式(4)と全く同じで，また弾塑性領域を指定するd_1, e_1およびd_2, e_2はそれぞれ式(6)および式(7)を用いて求められる。

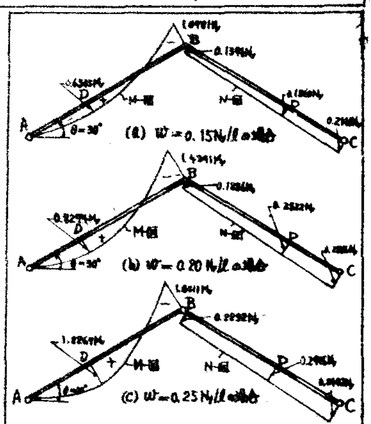
さらにD点の位置は $\sigma = (N + M)\sigma_y$ で与えられるゆえ，これに式(4)を代入したうえで $d\sigma/dx = 0$ を用いて次式より算定される。

$$x_0 = (1 - \sin\theta/K - H\tan\theta/\overline{W})\,l \qquad \cdots \quad (11)$$

(3) 中央点Bに塑性ヒンジが生ずる場合

水平反力Hは式(3)に$\xi = 1$を代入し式(8)を用いて次式がえられる。

$$H = \frac{-K\tan\theta + \sqrt{K^2\tan^2\theta + 3\cos^2\theta(K\overline{W} + 3)}}{3\cos^2\theta} \qquad \cdots \quad (12)$$



図－5 M-図およびN-図

崩壊荷重$\overline{W}$は式(11)および式(12)を式(3)に代入したうえで式(8)の条件を満足するとき，すなわちB点に塑性ヒンジが生じついでD点に塑性ヒンジが形成される場合に決定される。

3．数値計算例 $\theta = 30°$，$d/l = 0.1$の場合の計算結果の一部を図－5に示す。

4．結語 本研究はエネルギー法による2ヒンジ対称山形ラーメンの弾塑性数値解法を示したものであり，両端固定山形ラーメンの場合も同じく本法により解析可能となるが，非線型函数を取り扱う関係上さらに煩雑さが加わる点は止むをえない。本法はエネルギー法であるため弾性曲線法の場合に比較してより簡明に弾塑性領域を包含しうる点が有利である。

参考文献） 1) 山崎・石川： 弾塑性解析に用いる変形法の基本式の誘導について，土木学会西部支部研究発表会論文集，昭和41年1月

2) 山崎・石川： 2ヒンジアーチの弾塑性たわみ，オ20回土木学会年次学術講演会講演概要，昭和40年5月，