

九州大学工学部 正員 山崎徳也
 大学院 学生員 太田修昭
 大学院 学生員 小後藤栄一

§1 序言. 一定軸力と曲げの組合せ応力を受ける矩形断面の連続ばりの弾塑性解析を行うため、本論は先に著者らが考察した単純曲げに対する補足エネルギー法¹⁾と同一手法によって、かかる組合せ応力に対する補足エネルギーの実用式を誘導し、これに基づきエネルギー法の確立を図つたもので、従来の弾性分野のエネルギー法と同様、計算手法上の簡易性と適用面の多様性に於て勝れており、しかも充分の精度をうるなど、極めて有効な実用解法であるといえる。

§2 補足エネルギー

図- (1) (a) に示す矩形断面のばりに一定軸力 N 、および漸増曲げモーメント M を受けるとき、弾塑性解析に適用の仮定にしたがえば、断面に生ずる応力分布は、図- (1) (b) の弾性状態より図- (1) (c) の第1および第2弾塑性状態を経て、図- (1) (e) の完全塑性状態に達する。

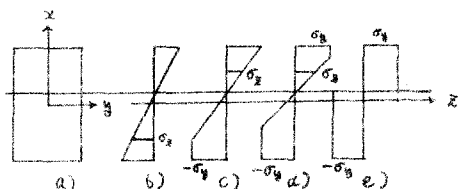


図 - (1)

よ、これよりモーメント $M = \int \sigma_z \times dA$ が、軸力 $N = \int \sigma_z dA$ を含んで次のごとく表わされる。すなわち、

第1弾塑性領域： $(M_{yI} \leq M \leq M_{yII})$, $M = (1-n)(3-2\sqrt{(1-n)/\psi}) M_y$

第2弾塑性領域： $(M_{yII} \leq M \leq M_{yIII})$, $M = \left\{ \frac{3}{2}(1-n^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\psi} \right)^2 \right\} M_y$

ただし $M_{yI} = (1-n)M_y$: 弾性限界時の第1降伏モーメント

$M_{yII} = (1+n-2\psi)M_y$: 第1および第2弾塑性領域の境界における第2降伏モーメント

$M_{yIII} = \frac{3}{2}(1-n^2)M_y$: 完全塑性モーメント

M_y : 単純曲げに対する降伏モーメント

$\psi = \phi/\phi_y$, ϕ : 曲率, ϕ_y : 単純曲げに対する降伏時の曲率

$n = N/N_y$, N_y : 軸力が単独に働くときの降伏荷重

図- (2) は M と ψ の関係を示すグラフとして図示した

もので、 n が増すにつれて M/M_y が著しく減少することを確認

められる。一般に軸力と曲げを考慮した棒の単位長さごとの

貯えられる補足エネルギーは、 $dU/ds = \int \epsilon d\sigma dA = N^2/EA$

+ $\int \phi dM$ で定義され、曲げ歪エネルギーを表わす第2項を考

察すれば、明らかに、図- (3) の斜線面積 OAB に相当する、

しかもに $M-\psi$ 曲線は ψ の複雑な函数と与えられ、面積 OAB

はモーメント M の無理函数で表わされることとなりその後の

演算が繁雑となるのでこの難点を排除するため、 $M-\psi$ 曲

線を図- (4) で示される2本の近似直線に置換すれば、面積 OAB

は $M_{yI} \leq M \leq M_{yII}$ の面積 $OAB = \frac{M^2}{2EI} + \gamma_1 \frac{(M-M_{yI})^2}{2EI}$

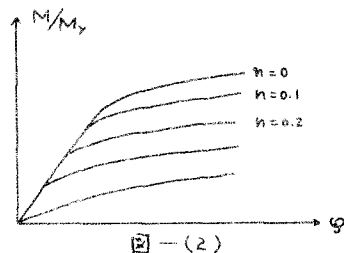


図 - (2)

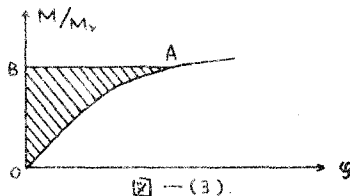


図 - (3)

$$M_{ye} \leq M \leq M_{pn} \text{ で面積 } OAB = \frac{M^2}{2EI} + \gamma_1 \frac{(M-M_{ye})^2}{2EI} + \gamma_2 \frac{(M-M_{ye})^2}{2EI}$$

$$\text{ただし } \gamma_1 = \gamma_1' - 1, \quad \gamma_2 = \gamma_2' - \gamma_1'$$

上記領域の近似直線の勾配を規制する γ_1', γ_2' の決定については、先に著者が「単純曲げに対する補正エネルギー」の実用式を求める際に用いたエネルギー等置法¹⁾によればよく、結果のみを示せば、それだけ次のごとくなる。

$$\gamma_1' = 1/(1-n), \quad \gamma_2' = 4(1+n^2)/(1-n)^3,$$

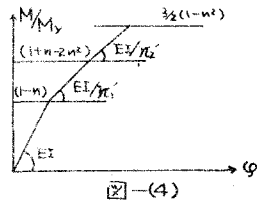


図-4

以上から、軸力と曲げの組合せ応力を受けるはり全体に与えられる補正エネルギーは

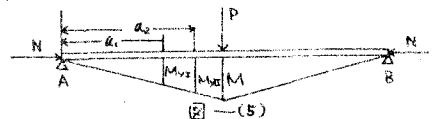
$$U = \int_{E_1 p_1 + p_2} \frac{M^2}{2EI} ds + \gamma_1 \int_{p_1 B} \frac{(M-M_{ye})^2}{2EI} ds + \gamma_2 \int_{p_2} \frac{(M-M_{ye})^2}{2EI} ds + \int \frac{N^2}{E_1 p_1 + p_2} ds \quad (1)$$

ただし積分区間を示す添字 E は弾性領域を、 p_1 は第 1 弾塑性領域を、また p_2 は第 2 弾塑性領域を示す。

3. 解法 以上の諸式を用いて、一定の軸圧縮力 N と部材の中央に漸増集中荷重 P を受ける矩形断面の単純ばりを対象として、中央点のたわみ δ が P から零から最終荷重 P_k に達するまでの範囲に対して算定すれば次のごとくなる。(図-5参照)

式(1)に変分原理を適用すれば

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = 2 \int_0^{l/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \gamma_1 \int_{a_1}^{l/2} \frac{(M-M_{ye})}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \gamma_2 \int_{a_2}^{l/2} \frac{(M-M_{ye})}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{Pl^3}{48EI} (1 + \gamma_1 + \gamma_2) - \frac{l^2}{8EI} (\gamma_1 M_{ye1} + \gamma_2 M_{ye2}) + \frac{2(\gamma_1 M_{ye1}^3 + \gamma_2 M_{ye2}^3)}{3P^2 EI}$$



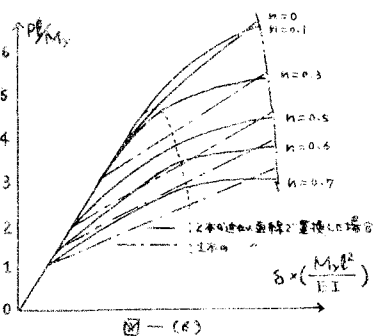
上式より δ と P の関係式をパラメータとして図示すれば図-6のごとくなり、 M - ϕ 曲線を忠実に積分して求めた補正エネルギーに基づく厳密解とほぼ

較による誤差はたかだか 1% 以内であった。

(ただし図-6)中の一点鎖線は、 M - ϕ 第 1 近似直線に基づく結果とかなりの誤差をもつことが認められる。なお式の誘導は省略する。)

次に不穩定荷りに対する解法も全く同様であり、式(1)に変分原理を適用したうえで未知量の塑性領域の境界における適合条件を用いて近似近似法により決定すればよい。

これについては詳細は講演時に発表するつもりである。



3. 4. 結び 本研究の結果、一定軸力と曲げを受ける矩形断面の

面のはり構造物に対する補正エネルギー法が弾塑性分野においても実用可能となり、実際に連続はりやラーメンに適用するには、あらかじめ適当な連モメントたわみ曲公式を誘導してあげれば、弾性の場合と同様にそれだけの分野において本法の価値を充分発揮するものがある。

文献 1) 山崎、太田：塑性領域に拡張したエネルギー法、

第 19 回土木学会年次学術講演会講演概要、昭和 39 年 5 月