

名古屋工業大学 正員 鹿井利一郎

松崎 聖

大学院 学生員 〇佐藤 暢彦

1. まえがき 最近の溶接技術の発達とともに、土木構造物に多く円管が取り入れられてきた。この現状からして円管の強度試験をする時あるいは円管構造物の支承または台座附近の応力状態を知る時に必要となる接触応力について検討をしてみる。すなわち一般に接触する物体が接触面に比して大きなものであって、その接触面での支圧応力度変位に限定するのぎり、その物体を半無限弾性体と見なしてもよいものである。ここで薄肉円環(管)と半無限弾性体との接触問題を接触面での支圧応力度分布を未知関数として、そこでの変位・関係から導かれる積分方程式を解く方法を試みた。

2. 半無限弾性体の境界における変位と圧力の関係 弾性体が $x-y$ 直交座標軸系、下半平面に相当するものとする。今、 $a \leq x \leq b$ なる境界に作用する圧力 $p(x)$ と境界上の点 P の y 方向変位 v_0 との関係は(1)式であり、(1)式を $p(x)$ について解けば(2)式である[1][2]。ただし $f(x) = dv_0/dx$ である。

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{2}{\pi} \left(\frac{p(x)}{E} \right) \frac{1}{x-x_0} \quad \text{ここに } E = E' (1-\nu^2) \text{ (平面弾性係数)}, \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \text{ (平面変形係数)} \quad (1)$$

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{E}{(x-a)(b-x)} \left\{ f(a) \sqrt{(x-a)(b-x)} \frac{dx}{x-x_0} + \frac{1}{\pi} \frac{C}{(x-a)(b-x)} \right\} \quad (2)$$

ここで定数 C は圧力・総和より決定される。すなわち(2)式は底面形状・既知である剛体スタンプで半無限弾性体を圧する問題の解である。また圧力が作用する弾性体の境界が局所的に曲率を有する場合も v_0 は平面境界の場合と同等とみなす事ができ、この場合も(1)式がそのまま適用できる。

3. 積分方程式とその近似解法 最初に次の3つの仮定を設ける。(1)接触面で摩擦係数が存在しない。(2)円環(管)の外側の接触面内の点は接触後もその x 軸方向の位置を変えない。(3)接触幅は円環(管)の外径の30%を越えない。次いで半無限弾性体の接触する部分の表面形状が(3)式で表わされるものとする。

$$f_0(x) = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^3}{6R^3} + C_0 \quad \text{ただし } R \geq 0, \quad d \leq 1 \quad (3)$$

接触面・変形前の円環(管)および弾性体の形状をそれぞれ $f_0(x)$, $f_1(x)$ また y 方向変位をそれぞれ v_1, v_2 で表わせば、接触後接触面両物体の表面が一致している事により、

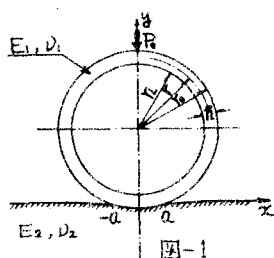
$$f_0(x) + v_1 = f_1(x) + v_2 \quad \therefore \frac{df_0}{dx} + \frac{dv_1}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{dv_2}{dx} \quad (4)$$

である。そこで $-a \leq x \leq a$ で接触し支圧応力度分布が $p(x)$ であるものとする。(4)式の dv_2/dx の項には円環(管)を不静定構造物として求める回転角を代入し、また dv_2/dx は(1)式によって与えられる。すると

$$a = m\bar{r}_0, \quad x = a\eta, \quad t = a\xi, \quad p(x) = (P_0/2ab)g(\eta) \quad (5)$$

$$Q = P_0/b\bar{r}_0 \left\{ 1 - d \left(\frac{\bar{r}_0}{R} \right)^3 \right\}, \quad K = (1-\nu^2)R^3 E_1 / 12R_1^2 R, \quad S = \left(1 - \frac{\bar{r}_0}{R} \right) \left\{ 1 - d \left(\frac{\bar{r}_0}{R} \right)^3 \right\} \quad (6)$$

ただし円環の場合 P_0 は全荷重、 b は円環の幅、 d は $\bar{r}_0 = 0$ 、一方円管の場合は単位長さ当たりの荷重を $P_0, \bar{r}_0 = 1, \nu = 1$ とおき表わす。なおいづれの場合も $p(x)$ は単位面積当たりの支圧応力度である。



これらの無次元量および定数を導入すれば(4)式は結局次のようになる。

$$\left(\frac{S}{Q} - \frac{1}{\pi K}\right)m^2 + \frac{m^4}{2Q} + \frac{m^3}{8K} \left\{ \int_1^{\eta} g(s)(s-\eta)^2 ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 g(s)(s-\eta)^2 ds \right\} = -\frac{1}{\pi} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{g(s)}{s-\eta} ds \quad (7)$$

さて $\int_1^{\eta} g(s)(s-\eta)^2 ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 g(s)(s-\eta)^2 ds = \int_1^{\eta} \{A(\eta-s) + B(\eta-s)^3\} ds$ と近似的に置いて解けば(8)式のごとく結果を得る。

ただし定数A, Bは上式が $\eta=10.5, \eta=11$ で成立するように $g(s)$ を求めた後に決定する。

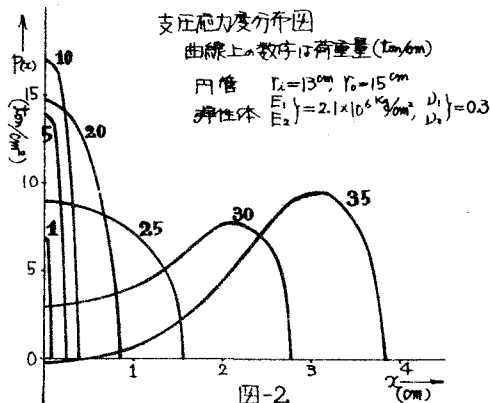
$$g(\eta) = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{\eta}{4} + m\eta^2\right)\sqrt{1-\eta^2}, \quad Q = \frac{Sm^2 + m^4(g_5 - g_6W)}{g_1d' - g_2d + g_3 - g_4W} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} \quad d' &= \frac{m^2}{K}, \quad d = \frac{m^3}{K}, \quad W = \frac{2}{2+b_2d}, \quad g = \frac{m^4}{Q}, \quad \eta = \frac{g}{2} + \frac{d}{4}(b_1 - b_2g)W \\ b_1 &= 0.39522, \quad b_2 = 0.02157, \quad g_1 = 0.3183, \quad g_2 = 0.4249 \\ g_3 &= 13.9907, \quad g_4 = 12.7175, \quad g_5 = 1.0690, \quad g_6 = 0.6940 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

4. 近似解法の誤差と計算例

近似的に置換した事による誤差は η 値にしたがい、例えば $\eta=0.1$ のところでは $\eta \leq 2$ の時 $\pm 1\%$ 以内であるが $\eta=10$ で -3.7% と η の増加につれて増すが実用上十分な精度を得たものと考えらる。ここで一計算例として荷重の増加による支圧応力度分布の変化を図-2に示した。なおこの時の条件は図-2中に記す。

5. 実験結果との比較検討 光弾性実験により円環内の等色線、偏光数より理論値と比較した結果は表-1のようである。ただし刺点は接触面中央断面内縁である。これよりSC-14, SC-18以外はよい一致をみる。一方その両実験では理論上



接路面の中央部で引張力が作用しているが(結論へ参照)実際には作用していないという事によって大きな誤差が説明される。

表-1

実験番号	KS-14	KC-10	KC-14	KC-18	SS-14	SC-10	SC-14	SC-18
荷重 R (kg)	14	10	14	18	14	10	14	18
R (cm)	∞	5.6	5.6	5.6	∞	5.5	5.5	5.5
測定値	12.8	8.8	11.1	11.6	13.3	8.5	10.1	10.2
理論値	12.6	8.6	11.2	12.5	12.7	8.8	8.5	7.9
誤差 (%)	+1.6	+2.3	-0.9	-7.2	+4.7	-3.4	+18.9	+29.1

$r_0 = 5.25 \text{ cm}, r_1 = 4.25 \text{ cm}, b = 0.605 \text{ cm}$

6. 結論 接触幅は荷重の増加につれていかに敏感に増大して平均支圧応力度を減少する。したがって最大支圧応力度は荷重が増加しても必ずしも増加しない。つまり $\eta=0.01$ 位までは増加するがその点を超すと減少した $\eta=1\%$ を過ぎると増加する。

すなわち支圧応力度分布形状は荷重の増加につれて初めは尖った山形をなすがいかに扁平となりやがて $\eta=1\%$ を過ぎると中央部がくぼみ、さらに荷重が増して $\eta=1\%$ を越すと理論上中央部で引張力が作用する事となる。

[1] K.A. ガーリン著、佐藤常三訳：弾性接触論

[2] 近藤次郎、積分方程式とその応用

[3] N.I. Muskhelishvili: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity