

1. 序 アーチダムのアバットメントを含む地山の2次元応力状態を解こうとする場合、標題の解法を組み立てねばならない。類似の問題にある歯車のつけ根の応力状態と H. Neuber⁽¹⁾ が解いており、1962 年以来一連の論文が発表されている。ここでは、具体的問題をとくにあて、写像関数といかにして誘導するかを述べ、複素応力関数の決定について触れる。

2. 写像関数 波状境界をもつ半無限板を解くのに、C. Weber⁽²⁾ が与えた写像関数を一般化して

$$z = Z(\zeta) = \zeta + a_0 + a_1 e^{-i\zeta} + a_2 e^{-2i\zeta} + \dots, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (1)$$

ただし、 a_n は複素数とすれば、これによって任意の境界形状をもつ半無限領域を表現できる。両辺の実部、虚部をそれぞれ等しくおいて

$$x = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \bar{a}_n \cos(n\zeta) + \bar{a}_n \sin(n\zeta) \} e^{n\eta}, \quad y = \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \bar{a}_n \cos(n\zeta) - \bar{a}_n \sin(n\zeta) \} e^{n\eta} \quad (2)$$

が導かれ、これより、写像面上 $\eta \leq 0$ の下半

平面は、物理面上 $x = \xi + \sum \{ \bar{a}_n \cos(n\zeta) + \bar{a}_n \sin(n\zeta) \}$,

$y = \sum \{ \bar{a}_n \cos(n\zeta) - \bar{a}_n \sin(n\zeta) \}$ を境界とする下半

平面に対応することとわかる。図に示せば左

のとおりである。具体的問題に対しては、さ

づ、かなり近似の良い写像関数を探め、これから

出発して、菊川⁽³⁾が与えている方法を用い近似

度の高い写像関数を導けばよい。つぎに、はじめの写像関数の決定について述べる。単位円とも

れに近い閉曲線はつぎのような写像関数によって結ばれる。*

$$w = \omega - \epsilon \omega \left[\bar{\alpha}_0 + \sum_{n=1}^N (\bar{\alpha}_n - i \bar{\alpha}_n) \right] + o(\epsilon) \quad (3)$$

ただし、 $w = u + iv$ によって近似円の、 $\omega = \sigma + i\tau$ によって単位円の領域をあらわす。 $\alpha_0, \alpha_n, \dots$

は南方向の近似円の半径 $r(\theta)$ と単位円の半径 1 との差を Fourier 級数

$$e^{i\theta} r(\theta) = r(\theta) - 1 = \bar{\alpha}_0 + \sum_{n=1}^N \{ \bar{\alpha}_n \cos(n\theta) - \bar{\alpha}_n \sin(n\theta) \} \quad (4)$$

であらわした場合の係数である。 ϵ が小であれば、(3) 式の対数をとって

$$\log w = \log \omega - \epsilon \left[\bar{\alpha}_0 + \sum_{n=1}^N (\bar{\alpha}_n - i \bar{\alpha}_n) \omega^n \right] + o(\epsilon) \quad (5)$$

を得る。 $i \log w$ が実軸を境界とする下半平面に写像されることは明らかである。よって $i \log w$

が波状境界を有する下半平面に写像されることとわかる。そこで、 $z = i \log w$, $\zeta = i \log w$ とお

き、さらに $i \bar{\alpha}_0 = -\epsilon i \bar{\alpha}_0$, $\bar{\alpha}_n + i \bar{\alpha}_n = -\epsilon (\bar{\alpha}_n + i \bar{\alpha}_n)$ とおけば、(6) 式より

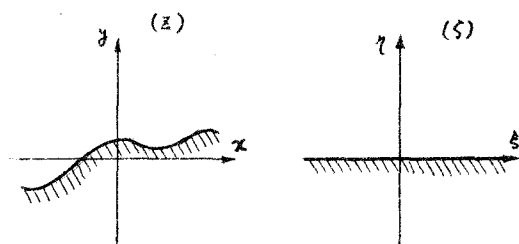
$$z = \zeta + i \bar{\alpha}_0 + \sum_{n=1}^N \bar{a}_n e^{-i n \zeta} \quad (6)$$

を得る。これは (1) 式と一致するものである。したがって、半径 1 の円に近い閉曲線の半径を調和

解析によって (4) 式のようにあらわし、係数 $\bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_n$ を求め、さらに (6) 式をつくり、近似単位円と下半平

面の境界形状の関係について予備知識をたぐっておけば、実際問題にあたって、境界形状に適当する

はじめの写像関数と z を得ることができる。



3. 直交曲線座標における複素応力関数. $\varphi(z), \psi(z)$ を $z = x+iy$ 面における2つの解析関数とすれば, Airy の応力関数は $F(x, y) = \text{Re} [\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)]$ にてあらわされ, 応力は σ に変位成分は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y) &= \text{Re} [\varphi'(z)], & \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) + i\tau_{xy} &= \bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z), \\ u - iv &= \frac{1}{2\mu} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} \varphi(z) - \{z\varphi(z) + \psi(z)\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

にて与えられる. 応力分布のみが問題とされる場合には, $\varphi(z), \psi(z)$ を $\bar{z}\varphi(z), \psi(z)$ とかきなおし,

(7) の式 1, 2 式を

$$\frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y) = \text{Re} [\bar{z}\varphi(z)], \quad \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) + i\tau_{xy} = \bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z) \quad (7')$$

と心得る. いま, 物理面の座標 $z = x+iy$ と写像面の座標 $\zeta = \xi+i\eta$ とが $z = Z(\zeta)$ によって結ばれているものとする. 写像関数 $Z(\zeta)$ によって物理面上に与えられる直交曲線座標に(7')式を用いれば, 座標軸の回転による複素応力関数の変換則から

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4}(\sigma_\xi + \sigma_\eta) &= \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y) = \text{Re} [\bar{z}\varphi(z)], \\ \frac{1}{2}(\sigma_\eta - \sigma_\xi) + i\tau_{\xi\eta} &= \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) + i\tau_{xy} \right\} e^{2i\alpha} = \left[\frac{\bar{Z}(\zeta)}{Z(\zeta)} \frac{\bar{Z}'(\zeta)}{Z'(\zeta)} + \psi'(z) \right] \frac{\bar{Z}'(\zeta)}{Z'(\zeta)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

を得る. 式中の $\bar{z}\varphi(z), \psi'(z)$ は $\bar{z}\varphi(Z(\zeta)), \psi'(Z(\zeta))$ のことであり, α とは $\eta = \text{const.}$ の曲線に対する接線の ξ 軸とのなす角である.

境界 $\eta = 0$ 上の力の分布を $\sigma_{\xi}(\xi_0), \tau_{\xi\eta}(\xi_0)$ とすれば, (8) 式に $\zeta = \xi_0$ とおき, 境界条件式

$$\sigma_{\xi}(\xi_0) + i\tau_{\xi\eta}(\xi_0) = \bar{z}\varphi(\xi_0) + \bar{z}'(\xi_0) + \frac{\bar{Z}(\xi_0)}{Z'(\xi_0)} \bar{z}'(\xi_0) + \frac{\bar{Z}'(\xi_0)}{Z'(\xi_0)} \psi'(\xi_0) \quad (9)$$

を得る. $\bar{z}\varphi(\xi_0), \psi'(\xi_0)$ は $\bar{z}\varphi(\zeta), \psi'(\zeta)$ の境界上の値である. $\bar{z}\varphi(\zeta), \psi'(\zeta)$ が上半平面で正則, かつ

$$\bar{z}\varphi(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right), \quad \psi'(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad \bar{z}'(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

ならば, Cauchy の積分定理, Schwarz の定理を用いて(9)式から $\bar{z}\varphi(\zeta), \psi'(\zeta)$ を導くことが出来る. 結果を示せば, つぎのとおりである.

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}\varphi(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{Z'(\zeta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\sigma_{\xi}(\xi_0) - i\tau_{\xi\eta}(\xi_0)\} \bar{Z}'(\xi_0)}{\xi_0 - \zeta} d\xi_0, \\ \psi'(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{Z'(\zeta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\sigma_{\xi}(\xi_0) + i\tau_{\xi\eta}(\xi_0)\} \bar{Z}'(\xi_0)}{\xi_0 - \zeta} d\xi_0 + \frac{\bar{Z}'(\zeta) \bar{z}\varphi(\zeta)}{Z'(\zeta)} + \frac{\bar{Z}(\zeta) \bar{z}'(\zeta)}{Z'(\zeta)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

いま, 境界上の1点に垂直な集中荷重 P が作用する場合を考える. (10)式において, σ_{ξ} は通常に選ぶことにより荷重作用点と原点に一致せしめることが出来る. さて, $-c \leq \xi_0 \leq c$ 上に一様な垂直荷重 p が分布する場合の解を(10)式より導き, $2cp = P$ とおき $c \rightarrow 0$ の極限を求めれば, 集中荷重に対する解を得る. 結果として, 応力式は次のとおり示せば, $A = i + a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots$ とし

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{P} (\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}) &= \text{Re} \left[\frac{A}{\zeta Z'(\zeta)} \right], \\ \frac{2\pi}{P} \left(\frac{\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi}}{2} + i\tau_{\xi\eta} \right) &= A \left[\frac{1}{\zeta Z'(\zeta)} - \frac{\bar{Z}(\zeta) \{Z'(\zeta) + \zeta Z''(\zeta)\}}{Z(\zeta) \zeta^2 \{Z'(\zeta)\}^2} \right] + \bar{A} \left[\frac{1}{\zeta Z'(\zeta)} - \frac{\bar{Z}(\zeta) \{\bar{Z}'(\zeta) + \bar{\zeta} \bar{Z}''(\zeta)\}}{\bar{\zeta}^2 \{\bar{Z}'(\zeta)\}^2} \right] \end{aligned}$$

となる.

文献. (1) H. Neuber, Die Parabelkürbe mit exzentrischer Einzelast und Versetzung. Ing.-Arch. 32 (1963) Nr. 2 S. 90/99 以下.

(2) C. Weber, Halbbiene mit periodisch gewelltem Rand. ZAMM 22 (1942) Nr. 1 329/33

(3) M. Kikukawa, On Plane-Stress Problems in Domains of Arbitrary Profiles. Proc. 3rd Japan Nat. Cong. Appl. Mech. (1953). p. 5/9