

東北大学 正員 佐武正雄

1. 要旨 歪エネルギーが Mooney-type で与えられる大きい変形をする弾性体の弾性法則を、従来行われている 変形→応力 の関係のみならず、応力→変形 の形で与え、2軸引張りの場合について数値計算を行って有限変形弾性法則の性質をしらべたものである。

2. 理論

理論については文献1)に述べてあるので詳細は省略する。ゴムなどの大きい変形をする非圧縮性弾性体の歪エネルギー U は、次の近似として Mooney による形

$$U = C_1 (M_0 \cdots M_0 - 3) + C_2 (M_0^{-1} \cdots M_0^{-1} - 3) \quad C_1, C_2 \text{ は弾性係数} \quad (1)$$

で与えられることが知られている。(ここに M_0 は変形を示す変形テンソル) (1)式を用いると、非圧縮性材料の弾性法則として

$$\sigma_0 = 2(C_1 M_0^2 - C_2 M_0^{-2}) + pI \quad \text{ただし} \quad \sigma_0 = R \cdot \sigma \cdot R^T \quad (2)$$

を得る。(2)式の左辺 σ_0 は真応力 σ そのものではないが、断面の法線が M_0 の主軸と一致する時は変形前の断面に σ と同じ分布強度で作用する応力と示している。(R は回転を示す直交テンソル, M_0, R などについては文献2)参照) 断面の回転がない場合には勿論両者の区別はない。

また、右辺の pI は静水圧を表わし、非圧縮性の場合、変形が与えられた時応力は特に条件がない限り任意の静水圧だけ不定と考える。(2)式は M_0^2 について逆に解くことができる。

$$M_0^2 = \frac{1}{4C_1} \left[(\sigma_0 - pI) + \{(\sigma_0 - pI)^2 + 16C_1 C_2 I\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3)$$

を得る。この場合、不定なパラメーター p は $|M_0| = 1$ (非圧縮性) の条件から定める。

3. 計算例(2軸引張り)

この場合、回転はかこらないから σ_0 と σ の区別はない。

$$\sigma = \begin{pmatrix} s & & \\ & t & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} m & & \\ & n & \\ & & l \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} m, n, l \text{ は伸縮率} \\ mnl = 1 \end{array} \right) \quad (4)$$

と置く。まず、変形が与えられている場合、 m をパラメーターとし、 $n = m^\alpha$, $l = m^{-\alpha-1}$ とおき $\alpha = -1, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2$ の場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} p &= -2C_1 m^{-2\alpha-2} + 2C_2 m^{2\alpha+2} \\ s &= 2C_1 (m^2 - m^{-2\alpha-2}) - 2C_2 (m^{-2} - m^{2\alpha+2}) \\ t &= 2C_1 (m^{2\alpha} - m^{-2\alpha-2}) - 2C_2 (m^{-2\alpha} - m^{2\alpha+2}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となるので、これから $m \rightarrow s$ の関係を図示すれば図-1となる。 $\alpha = -\frac{1}{2}$ の場合は $n = l$,

$t = 0$ となり、単軸引張りである。図-2 は $m \rightarrow l = \frac{t}{s}$ の関係を図示したもので、当然 $\alpha = 1$ の時は $l = 1$ 、 $\alpha = -\frac{1}{2}$ のときは $l = 0$ となっている。

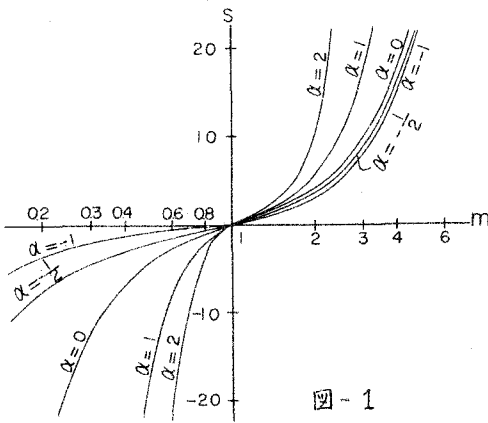


図-1

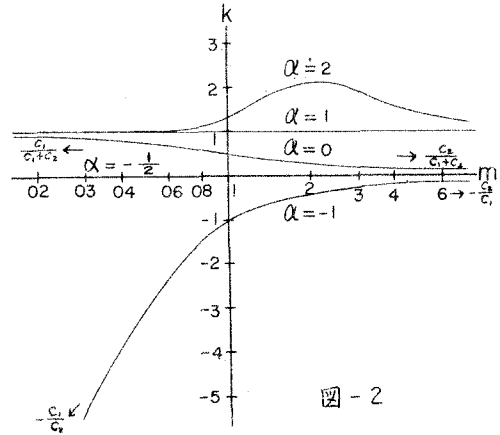


図-2

次に2軸引張りの応力を与えて変形を求める場合は(3)式から

$$m = \sqrt{\frac{1}{4C_1} \{ (s-p) + \sqrt{(s-p)^2 + 16C_1C_2} \}}, \quad n = \sqrt{\frac{1}{4C_1} \{ (t-p) + \sqrt{(t-p)^2 + 16C_1C_2} \}} \quad (6)$$

$$l = \sqrt{\frac{1}{4C_1} \{ -p + \sqrt{p^2 + 16C_1C_2} \}}$$

を計算する。 p は $l m n = 1$ の条件から定める。これは超越方程式

$$p = 4\sqrt{C_1C_2} \sinh \left(\sinh^{-1} \frac{s-p}{4\sqrt{C_1C_2}} + \sinh^{-1} \frac{t-p}{4\sqrt{C_1C_2}} + \frac{3}{2} \log \frac{C_2}{C_1} \right) \quad (7)$$

を解くことになるが、電子計算機を用いて数値的に求めた。図-3 はこうして得られた $S \rightarrow m$ 関係を示す。 $t = 0$ 、 S のものは当然図-1 の $\alpha = -\frac{1}{2}$ 、1 と同一である。図-4 は S と $\alpha = \log_m n$ の関係を示したものである。(数値計算では $2C_1 = 1$ 、 $2C_2 = 0.1$ とおいている)

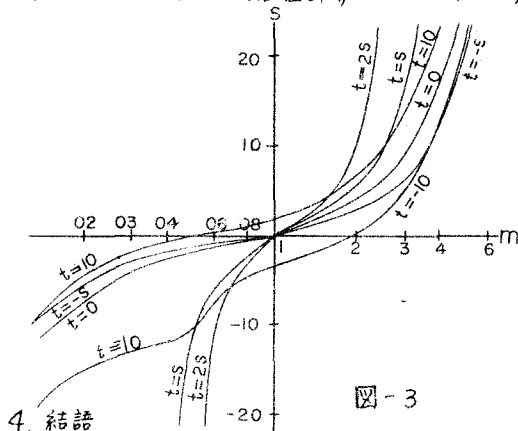


図-3

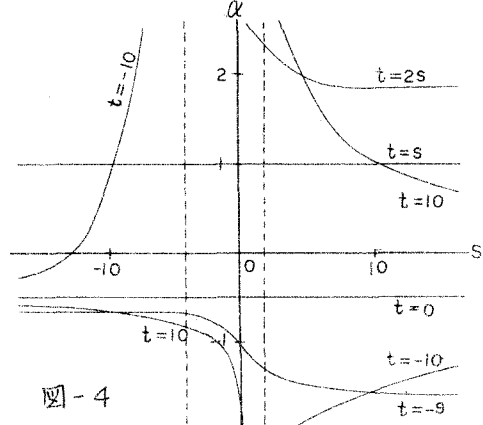


図-4

4. 結語

有限変形弾性法則に関する計算式と数値計算例を述べた。(1)式の第2項のため非線形となるので線形弾性のように重ね合わせは成立しない。したがって、上述のように2軸引張りの簡単な場合でもいろいろなケースについて調べる必要があるのである。

参考文献

- 1) 佐武：有限変形弾性法則に関する一考察，第15回応用力学連合講演会論文抄録集第I部
- 2) 佐武：変形の表現について，土木学会論文集（投稿中）