

九州大学 工学部 正員 山崎 徳也
 〃 応用力学研究所 熊井 豊二
 〃 大学院 学生員 〇 後藤 恵之輔

1.序 土木構造物に多用されている、ウェブに六角形の孔を並べた、いわゆるキャスト・ラッド・ビームを二次元弾性問題として取扱ったものには、著者等の解析¹⁾と村上氏等の実験²⁾以外に未だ報告あるものがない。著者等はさらにあわせて面内荷重として引張力および曲げモーメントをも加味した理論解を行った。

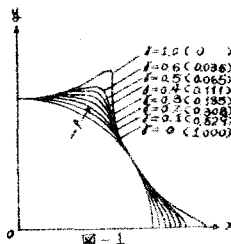
孔形には文献²⁾より正六角形が最も望ましいことが判明したが、厳密に取扱は難いので隣接孔の影響を無視し、かつ多少の凹凸のある、隅を円めた近似六角形孔を有する無限板を対象として、種々の面内荷重を受けるときの孔縁応力を計算し、隅角部の円味の影響について吟味した。

2.近似六角形の式 直角座標の原点を中心とし、一辺がy軸に直交するような近似六角形³⁾は次のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x &= a(5e^{\alpha \cos \beta} + \delta e^{-5\alpha \cos 5\beta}) \\ y &= a(5e^{\alpha \sin \beta} - \delta e^{5\alpha \sin 5\beta}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに a : 長さの次元を持つ、孔の大きさで定まる任意の正数
 α : $0 \leq \alpha \leq \infty$ β : $-\pi \leq \beta \leq \pi$
 δ : 孔の円味を支配する正数 $0 \leq \delta \leq 1$

本論文において取扱う六角形孔には上式において $\alpha=0$ としたものを用い、 δ の種々の値に対してその形状を図示すれば図-1のごとくで、括弧内の数値は、PおよびRをそれぞれ、隅角部の曲率半径および中心より隅に至る距離として、その比P/Rを示す。



3.孔縁応力の一般式 直交曲座標において接線方向の応力は、Airyの応力函数 χ を用いて次のごとくする。

$$\rho\theta = \frac{1}{25a^2J} \left\{ J \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho} \frac{\partial J}{\partial \theta} - \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right) \right\} \quad (2) \quad \text{ただし, } J = \frac{1}{25a^2} \left\{ \left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \right)^2 \right\}$$

Airyの応力函数は基礎方程式 $\nabla^4 \chi = 0$ を満足する、この式の本論に適用する一般解は式(1)を用いて次のごとく求まる。⁴⁾

$$\begin{aligned} \chi &= A_0\alpha + B_0\beta + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n e^{\alpha} + B_n e^{-\alpha} \right\} \frac{\sin n\beta}{\cos n\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left\{ \frac{5}{2} e^{(n+5)\beta} \frac{\sin n\beta}{\cos n\beta} \right\} (n-1)\beta + \frac{5}{2} e^{(n-5)\beta} \frac{\sin n\beta}{\cos n\beta} (n+5)\beta \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left\{ \frac{5}{2} e^{(n-1)\beta} \frac{\sin n\beta}{\cos n\beta} \right\} (n+1)\beta + \frac{5}{2} e^{(n+5)\beta} \frac{\sin n\beta}{\cos n\beta} (n-5)\beta + \frac{E_1 \alpha}{E_2 \beta} \left\{ 5e^{\alpha \cos \beta} + \delta e^{-5\alpha \cos 5\beta} \right\} + \frac{F_1 \alpha}{F_2 \beta} \left\{ 5e^{\alpha \sin \beta} - \delta e^{5\alpha \sin 5\beta} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n, E_1, E_2, F_1, F_2$ は未定常数、 $n=1, 2, 3, \dots$ である。

有孔板が一樣な引張力、剪断力、曲げモーメントを受けるときの応力函数は一般に次のようにおくことができる。

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\alpha) \frac{\sin n\beta}{\cos n\beta} n\beta \quad (4) \quad \text{ここに } \chi_0 \text{ は孔の無い場合の応力函数であり、} \chi_1 \text{ は } \chi = \chi_0 + \chi_1 \text{ によって孔縁の境界}$$

条件を満足し、無限遠で χ_1 のみを用いた χ_2, θ_2, χ_3 が消失するとき函数である。

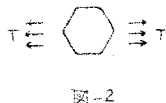
$$\text{孔縁の境界条件, } \chi\alpha = \chi\beta = 0 \text{ は式(4)を用いて次式におき換える。} \quad \frac{dF_n}{d\alpha} = 0, F_n = 0, \frac{dF_n}{d\alpha} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

$$\text{式(5)を用いれば所要の孔縁応力は式(2)より次のごとく極めて簡単になる。} \quad \left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right)_{\alpha=0} = \frac{1}{25a^2J} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} \quad (6)$$

4.無限遠で六角形孔の一辺に平行な方向に一樣な引張力Tが働く場合(図-2)

孔の無い場合の応力函数 χ_0 はこの際、次のごとくおくことができる。

$$\chi_0 = \frac{T}{2} y^2 = \frac{T a^2}{2} \left[\frac{25}{2} e^{2\alpha} + \frac{3}{2} e^{10\alpha} - 25 e^{\alpha} \cos 2\beta - 5 \delta e^{4\alpha} \cos 4\beta + 5 \delta e^{-4\alpha} \cos 6\beta - \frac{3}{2} e^{-10\alpha} \cos 10\beta \right] \quad (7)$$



χ_1 は $\alpha \rightarrow \infty$ において $\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \alpha^2} \approx 0, \frac{\partial \chi_1}{\partial \beta} \approx 0, \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \alpha \partial \beta} \approx 0$ となるような項を式(3)から選み出せば良い。すなわち式(7)を参照して

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{T a^2}{2} \left\{ (A_1 \alpha + \frac{1}{2} E_1 \alpha) + (B_1 e^{-\alpha} + \frac{5}{2} D_1 + \frac{5}{2} e^{5\alpha} D_1) \cos 2\beta + (B_1 e^{\alpha} + \frac{1}{2} D_1 + \frac{5}{2} e^{-5\alpha} D_1) \cos 4\beta + (B_1 e^{-6\alpha} + \frac{5}{2} E_1 D_1) \cos 6\beta + (B_1 e^{-8\alpha} + \frac{5}{2} E_1 D_1) \cos 8\beta \right. \\ &\quad \left. + (B_1 e^{10\alpha} + \frac{5}{2} E_1 D_1) \cos 10\beta \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

ゆえに式(7)と(8)とを加えて $\chi = \chi_0 + \chi_1 = \frac{T a^2}{2} \left[F_0 + F_2 \cos 2\beta + F_4 \cos 4\beta + F_6 \cos 6\beta + F_8 \cos 8\beta + F_{10} \cos 10\beta \right] \quad (3)$
 ここに $F_0, F_2, \dots, F_{10}$ は α, δ および未定常数 $A_0, B_2, B_4, \dots, D_1, D_3, \dots$ の函数で、未定常数は境界条件式(5)によって決定し、式(6)より孔縁応力を求めれば次のごとくなる。

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right)_{\alpha=0} = T \times \frac{(1-\delta^2)(25-3\delta^2) - 10(5-3\delta^2) \cos 2\beta + 20\delta \cos 4\beta}{(1+\delta-2\delta \cos 6\beta)(25-3\delta^2)} \quad (10)$$

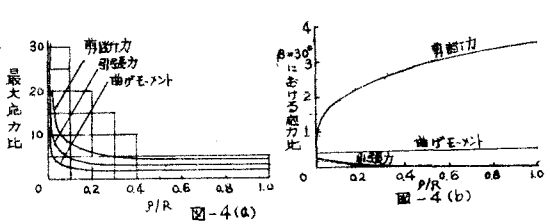
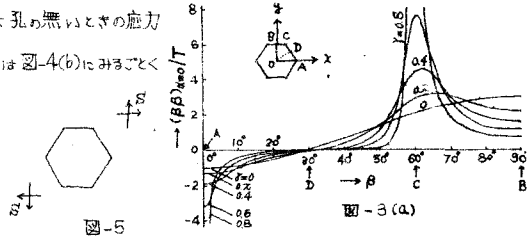
計算結果を β を横軸として図-3(a)に示す。孔縁の最大応力(必ずしも隅角部の円弧の頂点で起るとは限らないが、 $Y \geq 0.3$ では頂点に起ると考えてよい)を P/R に対してプロットすれば図-4(a)のごとく、 P/R が0.1より小さい範囲では最大応力は急速に増大し、0.1より大きくなると、極めて緩慢に減少し、円弧のとき($\delta=0, P/R=1.0$)には孔の無いときの応力の3倍となる。また、正六角形孔の直線部に相当する $\beta=30^\circ$ の応力は図-4(b)にみるごとく殆んど零と見做しうる。

5. 無限束において一様な剪断力 Q が働く場合(図-5)

本計算は既に発表済みであるが、応力式を示せば次式となる。

$$(\hat{p}\hat{p})_{\alpha=0} = -20\beta \times \frac{(5-3\beta)\sin 2\beta + 2\beta \sin 4\beta}{(1+\beta^2-2\beta \cos 6\beta)(25-3\beta^2)} \quad (11)$$

計算結果は図-3(b)のごとく、最大応力および $\beta=30^\circ$ の応力をそれぞれ図-4(a),(b)に示す。最大応力は引張力を受ける場合とほぼ同一傾向を示すが、直線部に相当する部分の応力は、 P/R が0から1に、すなわち六角形孔が円孔に近づくにつれて、その応力比が約1から3.5まで増加する。



6. Deep Beam の面内に一様な曲げモーメント M が働く場合(図-6)

$$\chi_0 = \frac{M}{6I} y^3 = \frac{M\alpha^3}{24I} \left[(375e^{3\alpha} + 307e^{-9\alpha}) \sin \beta + (25e^{3\alpha} + 75e^{-3\alpha}) \sin 3\beta + (1507e^{3\alpha} - 3e^{-15\alpha}) \sin 5\beta + 757e^{3\alpha} \sin 7\beta + 157e^{9\alpha} \sin 9\beta - 157e^{-9\alpha} \sin 11\beta + 7e^{15\alpha} \sin 15\beta \right] \quad (12)$$

ただし $I = \text{beam の中立軸に対する断面2次モーメント}$

これは式(3)より直ちに

$$\chi_1 = \frac{M\alpha^3}{24I} \left[(A_0e^{\alpha} + B_0e^{-\alpha} + \frac{1}{2}e^{3\alpha}D_0) \sin \beta + (B_0e^{3\alpha} + (\frac{1}{2}e^{\alpha} - \frac{1}{2}e^{-\alpha})D_2 + \frac{1}{2}e^{3\alpha}D_8) \sin 3\beta + (B_0e^{5\alpha} + \frac{1}{2}e^{-\alpha}D_4 + \frac{1}{2}e^{3\alpha}D_6) \sin 5\beta + (B_0e^{7\alpha} + \frac{1}{2}e^{-\alpha}D_6 + \frac{1}{2}e^{3\alpha}D_2) \sin 7\beta + (B_0e^{9\alpha} + \frac{1}{2}e^{-\alpha}D_8 + \frac{1}{2}e^{3\alpha}D_4) \sin 9\beta + (B_0e^{11\alpha} + \frac{1}{2}e^{-\alpha}D_6 + \frac{1}{2}e^{3\alpha}D_2) \sin 11\beta + (B_0e^{13\alpha} + \frac{1}{2}e^{-\alpha}D_4) \sin 13\beta + (B_0e^{15\alpha} + \frac{1}{2}e^{-\alpha}D_2) \sin 15\beta \right] \quad (13)$$

すなわち $\chi_0, \chi_1 = \frac{M\alpha^3}{24I} [F_1 \sin \beta + F_3 \sin 3\beta + F_5 \sin 5\beta + F_7 \sin 7\beta + F_9 \sin 9\beta + F_{11} \sin 11\beta + F_{13} \sin 13\beta + F_{15} \sin 15\beta]$ であり、ここに $F_1, F_3, \dots, F_{15}$ は α, β の関数で、未定定数 $A_0, B_0, \dots, D_2, D_4, \dots$ の関数で、未定定数を境界条件式(5)によって求め、式(6)より孔縁応力を決定すれば次式となる。

$$(\hat{p}\hat{p})_{\alpha=0} = \frac{M\alpha}{I} \frac{(5-6\beta^2)(5+2\beta)\sin \beta - 25(1+\beta)\sin 3\beta + 3(5+2\beta)\sin 7\beta}{(1+\beta^2-2\beta \cos 6\beta)(5+2\beta)} \quad (15)$$

計算結果は図-3(c)に示すごとくであるが、図中 $(\hat{p}\hat{p})_{\alpha=0}$ は孔の無い板において、中立軸より最も遠い孔縁に相当する部分の応力である。最大応力は図-4(a)にみるごとく、一様な引張力を受ける場合とほぼ同じ傾向があるが、直線部に相当する部分($\beta=30^\circ$)の応力は、図-4(b)より、円弧の大きさに関係なく殆んど同じ値である。

7. 考察および結論 式(14)の近似六角形式を用いるので孔縁各辺は曲線となるが、以上の結果から直線部に相当する $\beta=30^\circ$ の応力は左程大きくないので、近似六角形孔の隅角部応力が、正六角形孔の隅に円弧を付けた場合の隅角部応力を直ちに表わすと見做し差支えない。したがって、キャスト・スプレッド・ビームとして穿孔する場合、応力集中を避ける目的で隅角部に円弧を付けた際、その半径も少なくとも中立軸に至る距離の0.3倍位にすれば、円孔の場合と同じ効果によると思われる。なお孔が中立軸以外に在る場合には、本論5,6の計算を要すると思われる。

文献 1) 斎藤・渡藤：六角形孔を有する板のせん断力を受けるときの孔縁応力解析、昭和40年度土木学会部研究発表会論文集

2) 村田・金田・斎藤：曲げにせん断力を受ける有孔板の応力学的研究、同上

3) 村田：有孔板に於ける応力に就いて、造船協会々報第42号 昭和3年4月

4) 太田：隅を円弧とした長方形孔を有する板の周辺応力に就いて、造船協会々報第54号 昭和9年10月