I－51　　アーチダムの挙動解析における主成分分析法の適用について

熊本大学工学部　　正員　　三　池　亮　次

1．要旨

アーチダムは水圧荷重と1年を周期とする気温の影響を受け、全体としてきわめて緩慢な変位とひずみの変動を繰り返している。かかる水位および温度条件とたとえばダムの変位との関係を重回帰分析によって検討しようと言う試みはすでに行われ、ダムの安全管理の一手段としてかなり良好な成果を得ている。しかしながら重回帰分析によって全体としての変位の現象をきわめて正確に説明できるとしても、個々の因子の持分にそれを完全に構造分析することは各因子の間の相関が顕著であるためにかなり困難であった。そのため主成分分析法の適用が中村氏によって提唱されたがなお具体的成果を収めるに至っていない。本文ではこの方法をさらに検討することによって、相互の相関性のためもはや分離が不可能な因子群によって構成される新しい因子を想定する方法についての一試案を得たので報告する。

2．主成分分析

ある観測量 $\mathbb{y}$ と p 個の要因 $\mathbb{X}$ との間に次の線型回帰模型が成立するものとする。すなわち

$$\mathbb{y}=\mathbb{X}\beta+\mathbb{e} \qquad \text{------ (1)}$$

ただし　$\mathbb{y}'=[y_1\ y_2 \cdots\cdots y_n]$，$\beta'=[\beta_1\ \beta_2 \cdots\cdots \beta_p]$，$\mathbb{X}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$，$\mathbb{e}'=[e_1\ e_2 \cdots e_\alpha \cdots e_n]$

[　]：マトリクス，′：転置記号

その正規方程式は $\hat{\beta}$ を β の不偏推定値とするとき（$e_\alpha \in N(0,\sigma^2)$ とする。）

$$\mathbb{X}'\mathbb{X}\hat{\beta}=\mathbb{X}'\mathbb{y} \qquad \text{------ (2)}$$

$\beta'=(\beta_1',\beta_2')$ として $\mathbb{X}$ 因子に対して重回帰分析を行い、$\hat{\beta}_1$ 因子が有意であるとしても β_1 に対する $\mathbb{X}_1$ 因子と β_2 因子に対する $\mathbb{X}_2$ 因子との間の相関が顕著の場合には $\hat{\beta}_1$ の中に $\hat{\beta}_2$ の影響が含まれるから、この場合は相互の相関を零とする $\mathbb{U}$ 軸に直交変換して $\mathbb{U}$ 軸について重回帰分析を行えばよいであろう。すなわち直交行列 $\mathbb{L}$ および $\mathbb{U}$ を

$$\mathbb{L}=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{p1} \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & l_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{1p} & l_{2p} & \cdots & l_{pp} \end{bmatrix}\equiv[\mathbb{l}_1\ \mathbb{l}_2 \cdots\cdots \mathbb{l}_p]\ ,\quad \mathbb{U}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1p} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{np} \end{bmatrix}$$

とするとき　$\mathbb{U}=\mathbb{X}\mathbb{L}$ 　　------ (3)

によって x 軸を u 軸に直交変換すれば、新軸に対して正規方程式は

$$\mathbb{U}'\mathbb{U}\hat{\beta}^{(u)}=\mathbb{U}'\mathbb{y} \qquad \text{------ (4)}$$

(3)式を(4)式に代入すれば、固有値の性質により実数の対角行列 λ に対して

$$(\mathbb{X}\mathbb{L})'(\mathbb{X}\mathbb{L})\hat{\beta}^{(u)}=\mathbb{L}'(\mathbb{X}'\mathbb{X})\mathbb{L}\hat{\beta}^{(u)}=\lambda\hat{\beta}^{(u)}=\mathbb{U}'\mathbb{y} \quad \text{あるいは} \quad \hat{\beta}^{(u)}=\lambda^{-1}\mathbb{U}'\mathbb{y} \qquad \text{------ (5)}$$

(5)式の λ が対角行列であることは変量 u 相互の相関係数が零であることを示し，λ はマトリクス $\mathbb{X}'\mathbb{X}$ の固有値，$\mathbb{L}$ は固有マトリクスである。したがってこの場合の重回帰分析はきわめて簡単になり、

$$\mathbb{y}=\mathbb{U}_1\beta_1^{(u)}+\mathbb{U}_2\beta_2^{(u)}+\mathbb{e} \qquad \text{------ (6)}$$

において帰無仮説 H_2：$\beta_2^{(u)}=0$ を設ければ、仮説 H_2 における残差平方和

$$S_E(H_2) \equiv y'y - R^{(\omega)}(\hat{\beta}_1) \quad , \quad R^{(\omega)}(\hat{\beta}_1) = (\lambda_1^{-1}U_1'y)'U_1'y = (U_1'y)'\lambda_1^{-1}(U_1'y) \qquad \text{------(7)}$$

また対立仮説 $H_1: \beta^{(\omega)'} = (\beta_1^{(\omega)'}, \beta_2^{(\omega)'})$ における残差平方和

$$S_E \equiv y'y - R^{(\omega)}(\hat{\beta}) \qquad R^{(\omega)}(\hat{\beta}) = (U'y)'\lambda^{-1}(U'y) = (U_1'y)'\lambda_1^{-1}(U_1'y) + (U_2'y)'\lambda_2^{-1}(U_2'y) \qquad \text{-----(8)}$$

したがって $\beta_1^{(\omega)}$ による修正後の $\beta_2^{(\omega)}$ による平方和.

$$R^{(\omega)}(\hat{\beta}_2|\hat{\beta}_1) \equiv R^{(\omega)}(\hat{\beta}) - R^{(\omega)}(\hat{\beta}_1) = (U_2'y)'\lambda_2^{-1}(U_2'y)\,(= S_E(H_2) - S_E) \qquad \text{------(9)}$$

帰無仮説 H_2 の下で

$$\frac{\dfrac{R^{(\omega)}(\hat{\beta}_2|\hat{\beta}_1)}{p-r}}{\dfrac{S_E}{n-p}} \in F(p-r, n-p) \qquad \text{------(10)}$$

によって容易に β_2 の有意性を検定することができる。その分割した模型に対するAOV表は.

SV	SS	DF	MS	F_0
$\beta_2^{(\omega)}$による修正後の$\beta_1^{(\omega)}$	$R^{(\omega)}(\hat{\beta}_1\|\hat{\beta}_2) = (U_1'y)'\lambda_1^{-1}(U_1'y)$	r	$V_{\beta_1\|\beta_2}^{(\omega)} = \frac{R^{(\omega)}(\hat{\beta}_1\|\hat{\beta}_2)}{r}$	$\frac{V_{\beta_1\|\beta_2}^{(\omega)}}{V_E}$
$\beta_1^{(\omega)}$による修正後の$\beta_2^{(\omega)}$	$R^{(\omega)}(\hat{\beta}_2\|\hat{\beta}_1) = (U_2'y)'\lambda_2^{-1}(U_2'y)$	$p-r$	$V_{\beta_2\|\beta_1}^{(\omega)} = \frac{R^{(\omega)}(\hat{\beta}_2\|\hat{\beta}_1)}{p-r}$	$\frac{V_{\beta_2\|\beta_1}}{V_E}$
残　差	$S_E = y'y - R^{(\omega)}(\hat{\beta})$	$n-p$	$V_E = \frac{S_E}{n-p}$	
T	$y'y$			

かくして新軸に対して有意な r 個の因子に対して新たに1より r 個までの通し番号を付し，観測量 y との線型回帰模型を

$$y = b_1 u_1^{(n)} + b_2 u_2^{(n)} + \cdots\cdots + b_i u_i^{(n)} + \cdots\cdots + b_r u_r^{(n)} + e \qquad \text{-----(11)}$$

によって表わされるものとする。ここに

$$u_i^{(n)} = X l_i = X_1 l_{i1} + X_2 l_{i2} = u_{i1}^{(n)} + u_{i2}^{(n)} \qquad \text{------(12)}$$

であり (11) 式の残差平方和

$$Q = y'y - R^{(\omega)}(\hat{\beta}\ )\,(= y'y - R(\hat{\beta})) \qquad \text{------(13)}$$

に対して　$\dfrac{Q}{\sigma^2} \in \chi^2(n-r)$ ------(14)

である。U と X との関係式 (3) または (12) 式によって u は x のすべての因子の関数であることがわかる。しかし任意の u 因子を構成する x 因子群の中で、x 因子相互の相関が顕著でない何れかの因子の x 軸はその u 軸とほとんど直交するであろう。このような場合はむしろ u 軸を構成する x 因子の中で近似的に u 軸と直交するものはある基準に従って棄却し、相互に相関ある因子のみによって u 軸を構成すればよい。$u_i^{(n)}$ を構成する x 因子の中で有意性を検討する一方法として (11) 式の $u_i^{(n)}$ を分割し，

$$y = b_1 u_1^{(n)} + b_2 u_2^{(n)} + \cdots\cdots + b_i u_{i1}^{(n)} + b_i u_{i2}^{(n)} + \cdots\cdots + b_r u_r^{(n)} + e \qquad \text{----(15)}$$

において $b_i u_{i2}^{(n)} = 0$ なる帰無仮説 H_{i2} を設けたときの残差平方和を $Q(H_{i2})$ とすれば、H_{i2} が真なるとき

$$\frac{Q(H_{i2})}{\sigma^2} \in \chi^2(n-r) \qquad \text{----(16)}$$

かつ H_{i2} が真であるときの $Q(H_{i2})$ は真でないときの $Q(H_{i2})$ より小さく $Q(H_{i2}) > Q$ であろうから

$$F_0 \equiv \frac{Q(H_{i2})}{Q} \in F(n-r, n-r) \qquad \text{----(17)}$$

が成立し、$F_\alpha(n-r, n-r)$ を自由度 $(n-r, n-r)$ の 100α % 水準の F 値とすれば $F_0 > F_\alpha(n-r, n-r)$ であれば帰無仮説 H_{i2} は偽であるとして棄却する，すなわち $b_i u_{i2}^{(n)}$ は有意である。かくして相互の相関性のためにもはや分離が不可能な因子群によって構成される新軸を見出だすことが可能となるであろう。

適用例は講演会当日報告する。なお本研究は筆者が土研において中村現技術管理室長（土研）の指導の下に行った研究をさらに展開したものであることを記して謝意を表する。