

1. 変形する物体の仮想質量

仮想質量は質量を含む物理量：慣性力、運動エネルギー、運動量、振動周期などの真空中と流体中の差より定義できる。一般の物体運動では6つの自由度があるが、速度ポテンシャルを $\phi = \phi^R \delta_{Rk}$ と一般的に表わせば仮想質量はテンソル $T_{kk} = \rho_0 \iint \phi^* (\partial \phi / \partial n) ds$ で与えられる¹⁾。変形する物体ではこの剛体的な運動と変形による運動とに分けて考えられる。変形による運動は物体表面の法線方向運動を考へる。また、変形が微小であるとすれば変形によって新に渦動が発生せず、渦動による仮想質量は考へなくてよい。変形する物体について、先ず運動エネルギーによる定義を考えてみる。物体表面の変位を $y = f(\vec{r}_0)T(t)$ とおく。変形する物体では物体表面での速度は各点で異なるから、速度ポテンシャルを単位速度 $\dot{T}(t)$ に比例するとし、 $\phi = \phi(\vec{r}_0)T(t)$ とおく。流体の運動エネルギー K は²⁾

$$K = \frac{1}{2} \rho_0 \int_S \phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \cdot \dot{T}(t)^2 \quad (1)$$

こゝに、 n は境界面での外向法線、 S は境界全面を示す。我々の問題では、物体表面 S_0 で法線速度 $\partial \phi / \partial n$ が指定され、他の境界では ϕ (圧力) = 0 又は $\partial \phi / \partial n = 0$ の場合が多い。従って、(1) 式の積分は物体表面での積分 $\rho_0 \int_{S_0} \phi(\vec{r}_0) \cdot \partial \phi(\vec{r}_0) / \partial n ds$ で表わせる。 $\vec{r}_0$ 点の速度は $\vec{v} = f(\vec{r}_0) \dot{T}(t)$ であるから $\vec{r}_0$ 点の微小面積 ds_0 が寄与する運動エネルギー dK は

$$dK = \frac{ds_0}{2} \left[\rho_0 \cdot \frac{\phi \cdot \partial \phi / \partial n}{f^2} \right]_{\vec{r}_0 = \vec{r}_0} \cdot v^2 \quad (2)$$

従って、仮想質量分布 $m(\vec{r}_0)$ は(2)式の $[\]$ 内で示されるが、物体表面では $\partial \phi / \partial n = f$ であるから $m(\vec{r}_0) = \rho_0 \phi / f$ で与えられる。こゝは慣性力による定義と一致する。運動エネルギーによる定義では、自由表面のある場合、波のポテンシャルエネルギーを運動エネルギーに比べ無視したことになる。

物体の変形の型を仮定して取扱う近似法では、次の量が流体力を表わす係数として表われる。

$$M_T = \int_{S_0} m(\vec{r}_0) \cdot f(\vec{r}_0) ds_0 = \rho_0 \int_{S_0} \phi \cdot f(\vec{r}_0) ds_0 \quad (3)$$

こゝは、振動論で分布系を集中系に置換える際の generalized mass に相当するから、generalized virtual mass と呼ばたい。思頭教授の仮性質量の定義はこゝに相当する。(1) 式および $S \rightarrow S_0$ の置換を考へると、generalized virtual mass の意味は自明のことである。

2. 変形する物体の仮想質量の例

矩形水槽側板

$$m(y, z) = \frac{1}{w(y, z)} \cdot \rho_0 L \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2\varepsilon_i}{n_{ij}} \tanh \frac{n_{ij} L}{2} \cdot \int_0^1 w(B, \eta) \cos i\pi \xi \cos j\pi \eta d\eta \cdot \cos i\pi y/B \cdot \cos j\pi z/h$$

こゝに、 $\varepsilon_i = 1$ ($i=0$) : $= 2$ ($i \neq 0$)、 B : 巾、 L : 長さ、 h : 水深、 $n_{ij} = \pi \sqrt{(iL/B)^2 + (jL/h)^2}$ 、 $j=0, 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ 。 $w(y, z) = A \cdot \sin(\pi y/B) \cdot \sin(\pi z/h)$ とおいた時、generalized virtual mass は

$$M_T = \rho \cdot B L R \cdot \frac{8}{\pi^2} \sum_j \left\{ \frac{1}{(j^2-1)(j^2+1)} \right\} E_c \cdot \tanh \frac{\eta_j}{2} / \eta_j$$

円形水溝断面

$$m(s, z) = \frac{1}{W(s, z)} E_c \sum_{n=1}^{\infty} 2I_n \left(\frac{s}{\lambda_n} \right) \left[\int_0^1 W(\pi r, \eta) \cos 2n\pi r \cdot \cos \lambda_n \eta \cdot d\eta \cdot \cos n\theta \right. \\ \left. + \int_0^1 W(\pi r, \eta) \sin 2n\pi r \cdot \cos \lambda_n \eta \cdot d\eta \cdot \sin n\theta \right] \cos \lambda_n z_n$$

$$\therefore \text{即ち、} \lambda_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad I_n \left(\frac{s}{\lambda_n} \right) = \frac{I_n(\lambda_n s)}{\lambda_n \cdot I_0 - \lambda_n^2 \cdot I_0}$$

3. 変形を仮定した時の精度

水が弾性振動では、図1に示される様に出力が入力にスードバックされるから、たわみ形状は真空中と異なり一般には厳密に求まれない。水中に立てた円柱の振動は厳密解が求まる数少ない例であるが、この解を計算し真空中での振動と振巾比をとると図2の様にほぼ一致である。従って工学的な立場からは、流体中のたわみ形状と真空中のたわみ形状に仮定し、(3)式によって集約係数として取扱、こゝそ大差はない。円柱についてこの結果を示した。

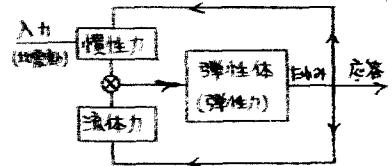


図1. 水が弾性振動のブロック図

4. 要約

- (1) 変形する物体についても仮定変量分布が定義できて、自由表面のない場合には、運動エネルギーによる定義は慣性力による定義と一致する。
- (2) 自由表面のある場合には、運動エネルギーによる定義は表面のポテンシャルエネルギーを無視したことに相当する。
- (3) 水が弾性振動では、一般に水平と真空中の振動形状は異なるが、真空中でのたわみ形状に等しいとしても大差はない(振巾は異なる)。
- (4) 振動形を仮定する場合には分布系を集中系に置換えて取扱えるが、その場合流体力は(3)式で提案する generalized virtual mass によって表わすことができる。
- (5) Generalized virtual mass は単位の変位に対する流体全体の運動エネルギーを表わす量を示している。

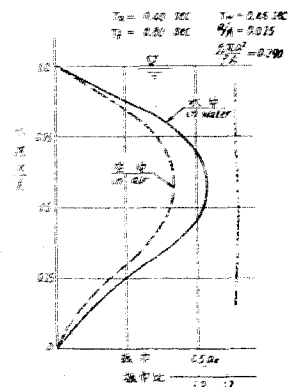


図2. 円柱たわみ

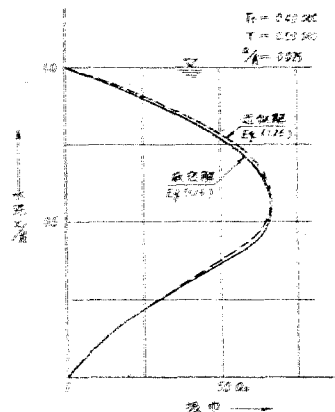


図3. 近似解と厳密解の比較

参考文献 ① Birkhoff: Hydrodynamics ② 反倉晋: 流体力学

③ 恩頭英成: 造船協会技報 88, 11-5

④ 松井彰雄: 土木技術 16-6 (64), 電研 技術研究所報告 土木6306

1963, 土木研 80-65051 (65)