I―49　不静定構造の破壊確率について

神戸大学工学部　正員　西村　昭

1. 緒論

不静定構造物においては、一部材、あるいは梁のような場合の一断面における破壊（あるいは降伏）は、構造物の全体的破壊を意味するものではない。このような場合の破壊確率の計算は、構造物が崩壊に至る経路の多様性、その途中における荷重の再配分などを考慮せねばならず、きわめて困難である。また、その構造物の破壊が脆性か延性かによって異なった取扱いが必要となってくる。この種の問題の解明への手掛りを得るため、最も単純な不静定構造物である並列材について、それが脆性破壊する場合につき破壊確率計算方法を求めたが*、ここではその考え方を更に延性破壊の場合に拡張した。

2. 並列型不静定構造物の脆性破壊

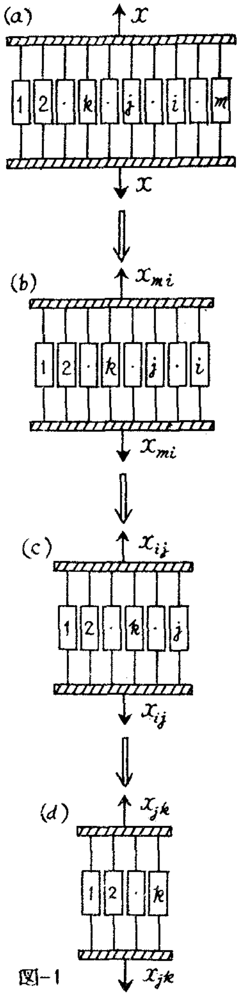


図-1

いずれかの部材の破壊と同時にその部材がそれまで分担していた荷重は再配分され、このため残存部材の分担荷重は不連続増加を示し、あらためて次段の破壊が生ずる。この破壊確率を求めるため次の仮定を設ける。（図-1）

(i) 荷重Sは存在する部材に均等に分担される。

(ii) 各部材は強度的に同等とし、共通の分布関数を有する。

(iii) 全部材の破壊を以て構造物の破壊とする。

いま、最初に部材数mで出発したものが、部材数kまで破壊が進行する場合につき、次の諸確率を定義する。すなわち

$p^m_{mk}(x)$ ： 最初m部材よりなる構造物で、大きさxの荷重によって$m-k$部材破壊し、k部材となる確率

$p^i_{jk}(x)$ ： 大きさxなる荷重のもとで、前段に部材数iまで破壊した構造物が部材数jまで破壊し、更にkまで進行する確率

p_{mk} ： 最初m部材よりなる構造物が荷重Sにより$m-k$部材に破壊が生ずる確率、従ってp_{m0}によって全体的破壊確率をうる。

Sを確率変数と考え、その密度関数を$f_S(x)$とすると、$(0<S<\infty)$

$$p_{mk} = \int_0^\infty p^m_{mk}(x)\, f_S(x)\, dx \qquad (1)$$

ここに$p^m_{mk}(x)$は、破壊の進行するすべての場合を考慮して

$$p^m_{mk}(x) = \binom{m}{1} F_{R0}\left(\frac{x}{m}\right) p^m_{m-1,k}(x) + \binom{m}{2}\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{m}\right)\right\}^2 p^m_{m-2,k}(x) + \cdots$$
$$\cdots + \binom{m}{m-k-1}\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{m}\right)\right\}^{m-k-1} p^m_{k+1,k}(x) + \binom{m}{m-k}\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{m}\right)\right\}^{m-k} p^m_{kk}(x) \qquad (2)$$

式(2)において

$$p^m_{kk}(x) = \left\{1 - F_{R0}\left(\frac{x}{k}\right)\right\}^k \qquad (3)$$

また$p^i_{jk}(x)$に対しては次の循環式を用いればよい。

* M. Shinozuka, J. T. P. Yao, and A. Nishimura: On the Reliability of Redundant Structures, Sixth Int'l Symposium on Space Technology and Science, Tokyo, Dec. 1965.

$$p^i_{jk}(x) = \binom{j}{1}\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{j}\right) - F_{R0}\left(\frac{x}{i}\right)\right\} p^j_{j-1,k}(x) + \binom{j}{2}\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{j}\right) - F_{R0}\left(\frac{x}{i}\right)\right\}^2 p^j_{j-2,k}(x) + \cdots$$
$$\cdots + \binom{j}{j-k}\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{j}\right) - F_{R0}\left(\frac{x}{i}\right)\right\}^{j-k} p^j_{kk}(x) \qquad (4)$$

ただし
$$p^j_{kk}(x) = \left\{1 - F_{R0}\left(\frac{x}{k}\right)\right\}^k \qquad (5)$$

上記の諸式において，$m \geq i > j > k$とする。また$F_{R0}(x)$は各部材強度分布関数である。

一例として$m=3$の場合につき確率を示せば次のようになる。

$$p^3_{33}(x) = \left\{1 - F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^3 \qquad (6)$$

$$p^3_{32}(x) = 3F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\left\{1 - F_{R0}\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2 \qquad (7)$$

$$p^3_{31}(x) = 6F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{2}\right) - F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}\left\{1 - F_{R0}(x)\right\} + 3\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^2\left\{1 - F_{R0}(x)\right\} \qquad (8)$$

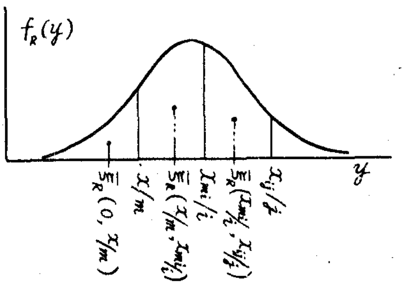
$$p^3_{30}(x) = 3F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\left[2\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{2}\right) - F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}\left\{F_{R0}(x) - F_{R0}\left(\frac{x}{2}\right)\right\} + \left\{F_{R0}\left(\frac{x}{2}\right) - F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^2\right]$$
$$+ 3\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^2\left\{F_{R0}(x) - F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\} + \left\{F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^3 \qquad (9)$$

これらの式(6)～(9)の間には次式が成立する。

$$\sum_{k=0}^{3} p^3_{3,k}(x) = p^3_{30}(x) + p^3_{31}(x) + p^3_{32}(x) + p^3_{33}(x) \qquad (10)$$

3. 並列型不静定構造物の延性破壊

構成材料の理想塑性を仮定すると，部材は降伏後もその降伏荷重を持続する。従って非降伏部材に作用する荷重は図－1の様に次第に変化する。前節の強度を降伏点でおきかえると，前節の諸式は次の様に書きかえられねばならない。すなわち，式(2)において



図－2

$$p^m_{kk}(x) = \left\{1 - F_{R0}\left(\frac{x-(m-k)\bar{\xi}_R(x/m)}{k}\right)\right\}^k = \left\{1 - F_{R0}\left(\frac{x_{mk}}{k}\right)\right\}^k \qquad (11)$$

$$p^i_{jk}(x) = \binom{j}{1}\left\{F_{R0}\left(\frac{x_{ij}}{j}\right) - F_{R0}\left(\frac{x_{mi}}{i}\right)\right\} p^j_{j-1,k}(x)$$
$$+ \binom{j}{2}\left\{ \qquad \text{〃} \qquad \right\}^2 p^j_{j-2,k}(x)$$
$$+ \cdots$$
$$+ \binom{j}{j-k}\left\{ \qquad \text{〃} \qquad \right\}^{j-k} p^j_{kk}(x) \qquad (12)$$

ここに　$x_{mm} = x$,　$x_{mi} = x - (m-i)\bar{\xi}_R(0, x/m)$,　$x_{ij} = x_{mi} - (i-j)\bar{\xi}_R(x/m, x_{mi}/i)$　(13)

また$\bar{\xi}_R(a, b)$は$a \leq R \leq b$なるRの部分母集団平均値である。〔図－2参照〕

式(12)で
$$p^j_{kk}(x) = \left\{1 - F_{R0}\left(\frac{x_{jk}}{k}\right)\right\}^k \qquad (14)$$

式(6)～(9)に対応して，$m=3$の場合の諸式は，

$$p^3_{33}(x) = \left\{1 - F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^3 \qquad (15)$$

$$p^3_{32}(x) = 3F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\left\{1 - F_{R0}\left(\frac{x_{32}}{2}\right)\right\}^2 \qquad (16)$$

$$p^3_{31}(x) = 6F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\left\{F_{R0}\left(\frac{x_{32}}{2}\right) - F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}\left\{1 - F_{R0}(x_{21})\right\} + 3\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^2\left\{1 - F_{R0}(x_{31})\right\} \qquad (17)$$

$$p^3_{30}(x) = 3F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\left[2\left\{F_{R0}\left(\frac{x_{32}}{2}\right) - F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}\left\{F_{R0}(x_{21}) - F_{R0}\left(\frac{x_{32}}{2}\right)\right\} + \left\{F_{R0}\left(\frac{x_{32}}{2}\right) - F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^2\right]$$
$$+ 3\left\{F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^2\left\{F_{R0}(x_{31}) - F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\} + \left\{F_{R0}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^3 \qquad (18)$$

いうまでもなく，この場合も式(10)は成立する。

荷重ならびに強度の確率密度関数を与えた数値計算例は$m=3$の場合についてすでに与えた通りであるが，延性破壊の場合についても式(15)～(18)を用いて計算できる。結果については，当日発表する予定である。