

有限変位理論による構造解析

三菱重工業K.K. 特別会員 藤野 勉

三菱重工業K.K. 正会員 O 大坂 寛 司

序 普通の構造物は、外力の作用による変形が比較的微小であって、原形と著しく異った形状で平衡状態に達することはない。一般に構造解析を行う場合には、微小変位を仮定した弾性理論を用いてもさしつかえないのであるが、吊橋などのように剛性の小さい柔構造は荷重に対する平衡位置と原形とのずれが大きく、これを無視できなくなってくる。また自重による大きな *Buckling* の部材に加わった状態にあることなどから、これらによる二次的影響を考慮することが必要である。

一般に有限変位理論による構造解析は非線形となるので実際の問題を取扱うには困難が多い。そのため本文では弾性理論を反復修正することによって直接実際に則した応力を求めるよう試みてみた。つまり、弾性理論により求めた変形位置で平衡方程式を再び組立て平衡状態と平衡方程式のずれがなくなるまで計算を繰返すわけである。

本文に用いた弾性理論は、いわゆる変形法である。これは、従来の撓度理論(*deflection theory*)の巨視的な立場から構造解析を行ってきたのに対して、微視的な方向から構造全体を解析したことに在る。この特長は補剛析の軸力、*tower* の変形、*ranger* の伸びの影響が直接計算に含まれ、すべての変形に対して有限変位が考慮されることにあるので、非常に厳密な解析が可能である。また特定の形式の構造でなく長大な *span* をもつ橋梁一般に適用できるので断面補剛析、斜吊杆、斜張索をもつ吊橋その他、アーチ橋などにもまったく自由に適用できることなどであらう。応用例として次ページに連続補剛析をもつ吊橋の計算例を取り上げてある。

解析理論 断面一様な弾性はりの軸方向を ξ 軸と定め、これと直交する主軸方向を η, ζ とする(図1)。

はりの変形は (ξ, η) 面内でのみ生じ、次の一次変形を仮定できるとする(図2)。

$$u(\xi, \eta) = u(\xi) - \eta \phi(\xi), \quad v(\xi, \eta) = v(\xi) \quad \dots \dots \dots (1)$$

この変形によるヒズミは

$$\epsilon_{\xi} = \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{du(\xi)}{d\xi} - \eta \frac{d\phi(\xi)}{d\xi}, \quad \gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{dv(\xi)}{d\xi} - \phi(\xi) \quad \dots \dots \dots (2)$$

はりに貯えられるヒズミエネルギーは

$$V = \iiint \left(\frac{1}{2} E \epsilon_{\xi}^2 + \frac{1}{2} G \gamma_{\xi\eta}^2 \right) d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{2} \int \left[EA \left(\frac{du(\xi)}{d\xi} \right)^2 + GA_s \left(\frac{dv(\xi)}{d\xi} - \phi(\xi) \right)^2 + EI \left(\frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{ただし} \quad A = \int \int d\eta d\zeta, \quad A_s = \mu A, \quad I = \int \int \eta^2 d\eta d\zeta$$

ここで、はりを骨組構造を構成する部材として考える。いま、はりの結合点は適当に付番されているものとして、構造全体に共通な基本直交座標軸に

x, y を選べば、これと任意のはり (i, j) に固有な部分座標 ξ, η とのベクトル関係は

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{ij} & \sin \theta_{ij} \\ -\sin \theta_{ij} & \cos \theta_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (4) \quad \text{で表わされる。 (図3)}$$

構造全体のヒズミエネルギー V は、部材のヒズミエネルギーの総和であるから

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \iiint \left(E \epsilon_{\xi}^2 + G \gamma_{\xi\eta}^2 \right) d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \int \left[EA \left(\frac{du(\xi)}{d\xi} \right)^2 + GA_s \left(\frac{dv(\xi)}{d\xi} - \phi \right)^2 + EI \left(\frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi \quad \dots \dots \dots (5)$$

したがって、変位に対するヒズミエネルギーの変分は、

$$\delta V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int \left[EA \frac{du}{d\xi} \frac{\delta u}{d\xi} + GA_s \left(\frac{dv}{d\xi} - \phi \right) \left(\frac{\delta v}{d\xi} - \delta \phi \right) + EI \frac{d\phi}{d\xi} \frac{\delta \phi}{d\xi} \right] d\xi$$

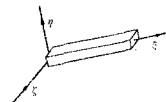


図1

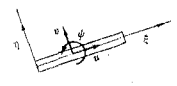


図2

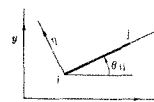


図3

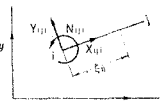


図4

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_j \sum_i \left[E A \frac{d^2 u}{d\xi^2} + G A s \left(\frac{dv}{d\xi} - \psi \right) \frac{dv}{d\xi} + E I \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \int_i^j \frac{d}{d\xi} \left(E A \frac{du}{d\xi} + G A s \left(\frac{dv}{d\xi} - \psi \right) \frac{dv}{d\xi} + E I \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + G A s \left(\frac{dv}{d\xi} - \psi \right) \frac{dv}{d\xi} \right) d\xi \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_j \left[X_{1j} u + Y_{1j} v + N_{1j} \psi - \int_i^j \left(\frac{dX}{d\xi} u + \frac{dY}{d\xi} v + \left(\frac{dN}{d\xi} + Y \right) \psi \right) d\xi \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_j \left[X_{1j} \frac{du}{d\xi} + Y_{1j} \frac{dv}{d\xi} + N_{1j} \frac{d\psi}{d\xi} - X_{1j} u + Y_{1j} v + N_{1j} \psi - \int_i^j \left(\frac{dX}{d\xi} u + \frac{dY}{d\xi} v + \left(\frac{dN}{d\xi} + Y \right) \psi \right) d\xi \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_j \left[(X_{1j} Y_{1j} N_{1j}) \begin{pmatrix} \cos \theta_{1j} \sin \theta_{1j} & 0 \\ -\sin \theta_{1j} \cos \theta_{1j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{dv}{d\xi} \\ \frac{d\psi}{d\xi} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_j \left(X_{1j} Y_{1j} N_{1j} \right) \begin{pmatrix} \cos \theta_{1j} \sin \theta_{1j} & 0 \\ -\sin \theta_{1j} \cos \theta_{1j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{dv}{d\xi} \\ \frac{d\psi}{d\xi} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_j \int_i^j \left(\frac{dX}{d\xi} u + \frac{dY}{d\xi} v + \left(\frac{dN}{d\xi} + Y \right) \psi \right) d\xi \right] \\
&= - \sum_j \left[(X_{1j} Y_{1j} N_{1j}) \begin{pmatrix} \cos \theta_{1j} \sin \theta_{1j} & 0 \\ -\sin \theta_{1j} \cos \theta_{1j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{dv}{d\xi} \\ \frac{d\psi}{d\xi} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_j \int_i^j \left(\frac{dX}{d\xi} u + \frac{dY}{d\xi} v + \left(\frac{dN}{d\xi} + Y \right) \psi \right) d\xi \right] \dots (6)
\end{aligned}$$

ここで構造に作用する外力が、変位によって失う位置エネルギーを P とすれば、無荷重状態の系全体の位置エネルギーの変分から $\delta V - \delta P = 0 \dots (7)$ である。いま、はりの結合点に集中力が作用している場合を考える(図5)

$$\delta P = X_1 \delta u_1 + Y_1 \delta v_1 + N_1 \delta \psi_1 \dots (8)$$

(6), (7), (8) 式から次の連立微分方程式が得られる。

$$\frac{dX_{1j}}{d\xi} = 0, \quad \frac{dY_{1j}}{d\xi} = 0, \quad \frac{dN_{1j}}{d\xi} + Y_{1j} = 0 \dots (9)$$

$$\sum_j (X_{1j} \cos \theta_{1j} - Y_{1j} \sin \theta_{1j}) + X_1 = 0, \quad \sum_j (X_{1j} \sin \theta_{1j} + Y_{1j} \cos \theta_{1j}) + Y_1 = 0, \quad \sum_j N_{1j} + N_1 = 0 \dots (10)$$

$$\text{ここに } \cos \theta_{1j} = \frac{(x_1 + u_1) - (x_1 + u_1)}{L_{1j}}, \quad \sin \theta_{1j} = \frac{(y_1 + v_1) - (y_1 + v_1)}{L_{1j}}, \quad L_{1j} = \sqrt{(x_1 + u_1 - (x_1 + v_1))^2 + (y_1 + v_1 - (y_1 + v_1))^2}$$

$$X_{1j} = E_{1j} A_{1j} \frac{du_1}{d\xi_{1j}}, \quad T_{1j} = \alpha E_{1j} E_{1j} A_{1j}, \quad Y_{1j} = G_{1j} A_{1j} s_{1j} \left(\frac{dv_{1j}}{d\xi_{1j}} - \psi_{1j} \right), \quad N_{1j} = E_{1j} I_{1j} \frac{d^2 \psi_{1j}}{d\xi_{1j}^2} \dots (11)$$

$$(9) \text{ (11) 式より } u_{1j} = u_{1j} + \frac{1}{E_{1j} A_{1j}} \left(X_{1j} - T_{1j} + \alpha E_{1j} E_{1j} A_{1j} \right) \xi_{1j}, \quad v_{1j} = v_{1j} + \left(\frac{Y_{1j}}{G_{1j} A_{1j} s_{1j}} + \psi_{1j} \right) \xi_{1j} + \frac{1}{2} \frac{N_{1j}}{E_{1j} I_{1j}} \xi_{1j}^2 - \frac{1}{6} \frac{Y_{1j}}{E_{1j} I_{1j}} \xi_{1j}^3, \quad \psi_{1j} = \psi_{1j} + \frac{N_{1j}}{E_{1j} I_{1j}} \xi_{1j} - \frac{1}{2} \frac{Y_{1j}}{E_{1j} I_{1j}} \xi_{1j}^2 \dots (12)$$

(12) 式を整理して、部材端の変位と応力の関係を得る。

$$\begin{aligned}
X_{1j} &= \frac{E_{1j} A_{1j}}{L_{1j}} (u_{1j} - u_{1j}) + T_{1j} - \alpha E_{1j} E_{1j} A_{1j} \\
Y_{1j} &= \frac{12 E_{1j} I_{1j}}{L_{1j}^3} \frac{v_{1j} - v_{1j} - \frac{1}{2} L_{1j} (\psi_{1j} + \psi_{1j})}{1 + 12 \epsilon_{1j}} \\
N_{1j} &= \frac{E_{1j} I_{1j}}{L_{1j}^3} \frac{6 (v_{1j} - v_{1j}) - 2 L_{1j} (1 - 6 \epsilon_{1j}) \psi_{1j}}{1 + 12 \epsilon_{1j}} \\
&\quad - 4 L_{1j} (1 + 3 \epsilon_{1j}) \psi_{1j} \\
N_{1j} &= N_{1j} - Y_{1j} L_{1j}
\end{aligned} \dots (13)$$

ただし $\epsilon_{1j} = \frac{E_{1j} I_{1j}}{G_{1j} A_{1j} L_{1j}^2}$

ここに、 T_{1j} , $\alpha E_{1j} E_{1j} A_{1j}$ は (i, j) 部材の Pretension および温度項、 u_i は i 結合点の変位量である。

以上から(10)式に(13)式を代入すれば部材結合点の平衡方程式が得られる。

応用例 右図は垂直吊橋をもつ標準的吊橋の応力計算例である。吊橋間隔は12m、結合点数は236である。自重は全て cable によって支えられるとして、計算にあたっては cable および hanger に pretension を与えて桁応力を除いた。死荷重は13.0ton/m、活荷重は3.0ton/m としてある。

参考文献 { 成瀬勝武 弾性橋梁
平井敦 鋼橋Ⅲ
藤野勉 (三重工技報)
大坂夏司 電算機による鋼橋の応力解析

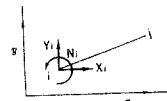
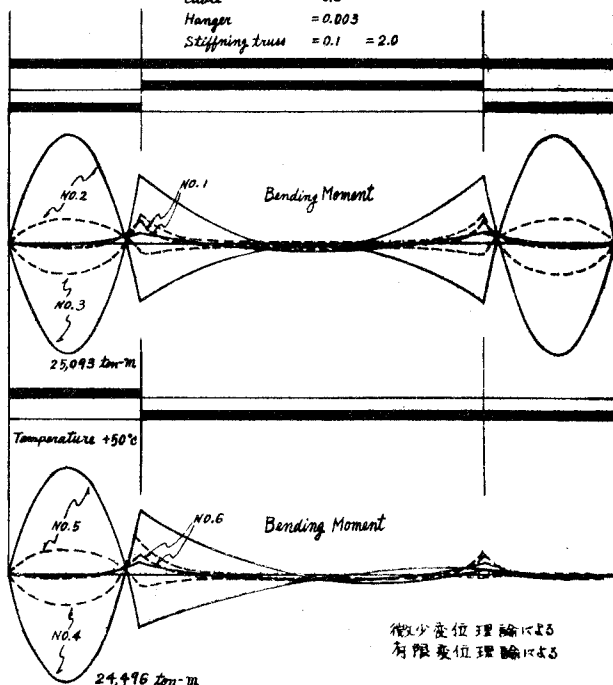


図 5



Tower $A = 1.2 \quad I = 10.7$
Cable $= 0.3$
Hanger $= 0.003$
Stiffening truss $= 0.1 = 2.0$



微小変位理論による
有限変位理論による