

東京大学工学部 正員 奥村敏恵
名古屋工業大学 正員 松浦 聖

まえがき 図1, 図2 に示めすような, 2本の主桁であるアーチが, それぞれ, その支座では一定の間隔があるが, 中央では一体となつていて, 著しいテーバーのついた, いわゆるバスケットバンド形式のアーチ構造物の, 弾性生座値をエネルギー法を用いて解析している。とくに, いままで解析されているアーチとは構造

的に特異なアーチの, テーバーと生座との関係に着目して, その角度至の変化に伴う, 生座値の変化を計算によつて求め, テーバーの影響を示している。

こゝでは, 荷重としては, アーチ面(工面)内, 中心(O点)方向に等分布満載荷重を考へ, 円形ア

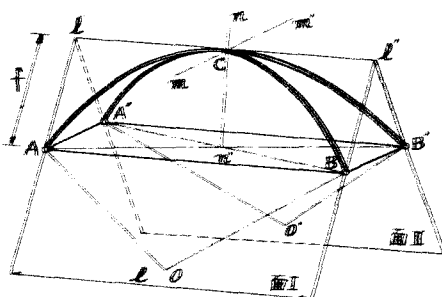


図-1 アーチ見取図

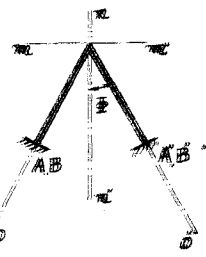


図-2 横断面図

ーチとし, 断面は, 例えばパイプのごとき, その重心と, せん断中心とが一致するものを考へている。なお, 生座値として, 種々考察すべき問題のうち, まず, 次のような限定した場合を取り扱っている。すなわち, アーチに満載等分布荷重が, 面内, あるいは鉛直方向などに, 作用して生座変形が起きるとき, その状態が, 基本的に考えられるのは, 剛節長に代, 橋軸線に代, 橋軸線を含む鉛直面に変形後もある場合と, そうでない場合とに大別され, さらに前者は, C

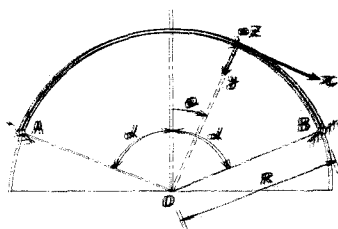


図-3 アーチ変形図

桌が π 軸上で変位する, いわゆる対稱生座と, π 軸, π 軸のまわりに回転変形する非対称生座と, さらに非対称生座に区分されるが, こゝでは, まず非対称生座について考察している。支束は, アーチ面内の回転, すなわち, Z軸まわりの回転のみ自由で, その外的変位回転は拘束されているものとする。なお

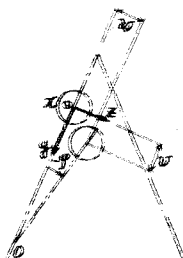


図-4 変位の符号

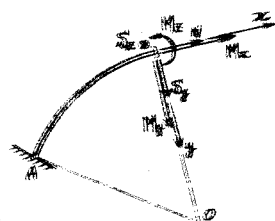


図-5 断面力の符号

等分布面内中心方向荷重を受けるとき, アーチが生座変形したとき蓄えられるエネルギー $\bar{U}$ の算定荷重が載荷されたとき, つぎのような軸力, 曲げモーメントが発生しているものとする。(別に, すでに計算したもの) $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ はアーチの寸法, 荷重(p)により定まる定数で, また $F_1 = EA/R$, $F_2 = EI/R$, $F_3 = GJ/R$, $F_4 = EI/R$ である。

$$N = -Rp - 2F_1 \{ C_1 \sin(\theta + \alpha) + C_2 \cos(\theta + \alpha) \}, \quad M_z = -RF_2 \{ 2C_3 \sin(\theta + \alpha) + 2C_4 \cos(\theta + \alpha) + C_5 \},$$

$$M_\theta = 2F_3 F_4 / F_3 + F_4 \{ -C_6 \sin(\theta + \alpha) + C_7 \cos(\theta + \alpha) \}, \quad M_{\theta_0} = 2F_3 F_4 / F_3 + F_4 \{ C_8 \sin(\theta + \alpha) + C_9 \cos(\theta + \alpha) \} + F_3 / R, \quad C_6$$

この(1)式で示されるような応力状態から、新しい坐屈変形状態に移るとき、アーチが得るポテンシャルエネルギー W を計算すれば、次のようになる。

$$W = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{F_2}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} \right)^2 + \frac{F_2}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} - \varphi \right)^2 + \frac{F_2}{2} \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v \right)^2 + M_{\alpha_0} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} \right) - M_{\alpha_0} \left(\frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} - \varphi \right) - M_{\alpha_0} \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v \right) - \frac{1}{2} \frac{N_0}{R} \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v \right) v - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 p \right] d\theta$$

$$+ 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\frac{F_2}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} \right)^2 + \frac{F_2}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} - \varphi \right)^2 + \frac{F_2}{2} \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v \right)^2 + M_{\alpha_0} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} \right) - M_{\alpha_0} \left(\frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} - \varphi \right) - M_{\alpha_0} \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v \right) - \frac{1}{2} \frac{N_0}{R} \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v \right) v - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 p \right] d\theta \quad (2)$$

こゝで(2)式の右辺第1行と第2行の、第1項第2項 および第3項は変形による歪エネルギーであり、第4項第5項第6項、および第7項は座屈が始まる直前に、アーチに働いていた応力のなす仕事であり、とくに軸力のなす仕事としては、アーチの面内曲げ変形に対応する圧縮力の影響のみ考慮している。第8項は荷重 p のした仕事で、この場合は、荷重 p の作用方向が初めの方向に、常に平行な場合を考え、アーチの軸長は変形後も変わらないとし、面外変形による変位を考慮し、ねじり変形による変位の影響は省略している。

座屈荷重の算定

さきに坐屈変位を求めて求めたポテンシャルエネルギー W が最小であるべきこと、すなわち変分 $\delta W = 0$ なる条件式から、座屈変形の満足すべき基本式は、次のようになる。なお変位は $\theta = \alpha$ と $-\alpha$ で $v, w, \varphi = 0$ 、また $\theta = 0$ で $v, w, \varphi = 0$ を考慮すれば

$$F_2 R w'''' - (F_2 R - PR) w'' - (F_2 + F_2) \varphi'' = 0 \quad (3.1) \quad -1/R (F_2 + F_2) w'' - F_2 \varphi'' + F_2 \varphi = 0 \quad (3.2) \quad F_2 v'''' + (F_2 - \frac{N_0}{R}) v'' + (F_2 - \frac{N_0}{R}) v = -F_2 \varphi \quad (3.3)$$

同じことが、 v_2, w_2, φ_2 についても書ける。座屈変形に対する境界条件としては、近似解法として次の式(4.1)~(4.5)が考えられる。支座において、 $v=0, w=0, \varphi=0, \frac{dw}{d\theta}=0, \frac{dv}{d\theta}=0$ (4.1) また頂点 C で m 坐屈の場合；(m - m 軸まわりに回転坐屈)

$$v=0, w=0, \varphi=0, \frac{dv}{d\theta}=0, \frac{dw}{d\theta}=0 \quad (4.2) \quad \frac{dw}{d\theta} = \left(\frac{dw}{d\theta} \right) \tan \alpha \quad (4.3)$$

n 坐屈の場合；(n - n 軸まわりに回転坐屈)

$$v=0, w=0, \varphi=0, \frac{dv}{d\theta}=0, \frac{dw}{d\theta}=0 \quad (4.4) \quad \frac{dv}{d\theta} = -\left(\frac{dv}{d\theta} \right) \tan \alpha \quad (4.5)$$

つぎに、境界条件(4.1), (4.2), (4.4)を満足し、変位の対称性を考慮し、 w, v を次のごとく仮定する。

$$w = aR \left\{ \sin \frac{\pi}{2\alpha} \theta + \sin \frac{3\pi}{2\alpha} \theta \right\} \quad (5.1) \quad v = b \sin \frac{\pi}{\alpha} \theta \quad (5.2)$$

(5.1)式を(3.2)式に代入すれば φ が(5.3)式のように求まる。

$$\varphi = a \left\{ \delta_1 \sin \frac{\pi}{2\alpha} \theta + \delta_2 \sin \frac{3\pi}{2\alpha} \theta + \delta_3 \sinh t \theta \right\} \quad (5.3)$$

こゝで $\delta_1 = -(t+1) \frac{\pi^2}{4\alpha^2} / \frac{\pi^2}{4\alpha^2} + t^2$ 、 $\delta_2 = -(t+1) \frac{9\pi^2}{4\alpha^2} / \frac{9\pi^2}{4\alpha^2} + t^2$ 、 $\delta_3 = -(t_1 - \delta_2) / \sinh t \alpha$ 、 $t = \sqrt{F_2 / F_3}$ 、なお式(4.3), (4.5)を考慮すると v は、 m 坐屈の場合 $v = aR \cot \alpha \sin \frac{\pi}{2\alpha} \theta$ (6.1) n 坐屈の場合 $v = -aR \tan \alpha \sin \frac{\pi}{2\alpha} \theta$ (6.2) となる。こゝで近似的に簡単に坐屈荷重を求めるため、式(5.1), (5.3), (6.1), (6.2)を使って W を求めるとき、

いまの場合、 $M_{\alpha_0}, M_{\beta_0}, M_{\gamma_0}$ の項は影響が小さいので省略し、さらに軸力は一定として $N = -PR$ とすれば

$$N_{cr} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[F_2 \left(\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} \right)^2 + F_2 \left(\frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} - \varphi \right)^2 + F_2 \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v \right)^2 \right] d\theta / \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v \right) v - \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 \right] d\theta \quad (7) \quad \text{で求められる。}$$

数値計算例

$R = 50m, l = 60m, f = 10m$, パイプ断面の外径 $50cm$, 肉厚 $1cm$ のアーチの坐屈値 N_{cr} を計算し、 α の変化による坐屈値の影響を示したのが図-6である。

参考文献 ① S. Timoshenko; Theory of Elastic Stability, 菅西茂；アーチのねじり座屈について, 論文集 75号, 深沢泰晴；題目省略, 論文集 96号 ② 上記 Timoshenko の 2/3 ページ

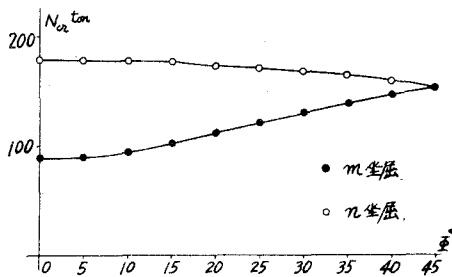


図-6 m 坐屈値および n 坐屈値