

九州大学 工学部 正員 山崎徳也

大学院 学生員 山崎 毅

1. 概要 静力学における撓角法が梁のたわみ曲線の微分方程式と直接解くよりも明快かつ多用途に富むのと同様に振動において運動方程式と撓角法の形式に書き換えて解と求めるいわゆる振動撓角法がラマン等の複雑な骨組構造物の振動解析における実用解法として威力を発揮することは周知の通りである。著者は Waltring⁽¹⁾の微分方程式と基にして円弧部材に対する振動撓角式を導き、すでに水原胆、小野薫⁽²⁾氏等によって導かれた直線材振動撓角式と併用することにより、直線部材および円弧部材より成る構造物の振動解析と可能なものとした。なお対象とする円弧部材は断面にくらべて長さ十分長い slender なものとし、ここでは中立軸の伸縮のない曲げ振動を行うものとする。

2. 基本式 円弧部材の面内曲げ振動の微分方程式は Waltring により求められており断面の中立軸の伸縮がないという前提のもとに切線方向変位 $v(\varphi, t)$ に関して次式で与えられる。

$$\frac{EI}{R^3} \left(\frac{\partial^6 v}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - v \right) = 0 \quad (1)$$

ただし EI は曲げ剛性、 R は円弧部材軸半径、 ρ は単位長さ当りの質量を表わす。極座標系は部材の左端を始点とし、中心角は 2β とする。 $v(\varphi, t) = V(\varphi) \cdot \sin \omega t$ とおき式(1)に代入して規準函数 $V(\varphi)$ に関する微分方程式をうる。すなわち

$$\frac{d^6 V}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 V}{d\varphi^4} + (1 - \lambda^4) \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \lambda^4 V = 0 \quad (2)$$

ただし $\lambda^4 = \omega^2 R^4 / EI$ であり ω は角振動数である。式(2)の一般解は $\lambda^4 > 17.64$ のとき

$$V(\varphi) = C_1 \cosh a\varphi + C_2 \sinh a\varphi + C_3 \cosh b\varphi + C_4 \sinh b\varphi + C_5 \cos c\varphi + C_6 \sin c\varphi \quad (3)$$

となり定数 a, b, c は次式により与えられる正数である。

$$a^6 + 2a^4 + (1 - \lambda^4)a^2 + \lambda^4 = 0, \quad b^6 + 2b^4 + (1 - \lambda^4)b^2 + \lambda^4 = 0, \quad c^6 - 2c^4 + (1 - \lambda^4)c^2 - \lambda^4 = 0 \quad (4)$$

次に半径方向変位、角変位、曲げモーメントおよびせん断力の規準函数とせよ $W(\varphi)$, $\Xi(\varphi)$, $M(\varphi)$ および $Q(\varphi)$ と表わせば曲り梁の基礎理論より

$$W(\varphi) = V(\varphi), \quad R\Xi(\varphi) = V(\varphi) + V'(\varphi), \quad R^2 M(\varphi) = -EI(V''(\varphi) + V'''(\varphi)) \quad (5)$$

$$R^3 Q(\varphi) = -EI(V''(\varphi) + V'''(\varphi))$$

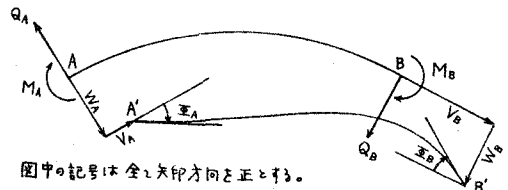
以上の関係式を用いた次の境界条件

$$\varphi = 0: V = V_A, W = W_A, \Xi = \Xi_A$$

$$\varphi = 2\beta: V = V_B, W = W_B, \Xi = \Xi_B$$

のとき式(3)の定数 $C_1 \dots C_6$ を定めれば次のようになる。

$$\begin{bmatrix} V_A \\ W_A \\ R\Xi_A \\ V_B \\ W_B \\ R\Xi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 & c \\ (1+a^2) & 0 & (1+b^2) & 0 & (1-c^2) & 0 \\ \cosh 2a\beta & \sinh 2a\beta & \cosh 2b\beta & \sinh 2b\beta & \cos 2c\beta & \sin 2c\beta \\ a \sinh 2a\beta & a \cosh 2a\beta & b \sinh 2b\beta & b \cosh 2b\beta & -c \sin 2c\beta & c \cos 2c\beta \\ (1+a^2) \cosh 2a\beta & (1+a^2) \sinh 2a\beta & (1+b^2) \cosh 2b\beta & (1+b^2) \sinh 2b\beta & (1-c^2) \cos 2c\beta & (1-c^2) \sin 2c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}$$



図中の記号は全て矢印方向と正とする。

$$\text{ゆえに} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ W_A \\ R\Xi A \\ V_B \\ W_B \\ R\Xi B \end{bmatrix}$$

したがって、これを \$C_1, \dots, C_6\$ を式(3)に代入する式(5)より \$M\$ と \$Q\$ を求め、\$M(0) = M_A\$, \$M(2\beta) = M_B\$, \$Q(0) = Q_A\$, \$Q(2\beta) = Q_B\$ の置き換えを行えば、所要の振動振角式がえられる式となる。

$$M_A = -\frac{EI}{R^2} (\alpha_1 V_A + \alpha_2 W_A + \alpha_3 R\Xi A + \alpha_4 V_B + \alpha_5 W_B + \alpha_6 R\Xi B)$$

$$M_B = -\frac{EI}{R^2} (\beta_1 V_A + \beta_2 W_A + \beta_3 R\Xi A + \beta_4 V_B + \beta_5 W_B + \beta_6 R\Xi B)$$

$$Q_A = -\frac{EI}{R^2} (\delta_1 V_A + \delta_2 W_A + \delta_3 R\Xi A + \delta_4 V_B + \delta_5 W_B + \delta_6 R\Xi B)$$

$$Q_B = -\frac{EI}{R^2} (\delta_1 V_A + \delta_2 W_A + \delta_3 R\Xi A + \delta_4 V_B + \delta_5 W_B + \delta_6 R\Xi B)$$

$$\text{したがって} \quad \alpha_i = a(a^2+1)b_{2i} + b(b^2+1)b_{4i} - c(c^2-1)b_{6i}, \quad \delta_i = a^2(a^2+1)b_{7i} + b^2(b^2+1)b_{9i} + c^2(c^2-1)b_{11i}$$

$$\beta_i = a(a^2+1)(\sin 2\alpha\beta \cdot b_{7i} + \cos 2\alpha\beta \cdot b_{9i}) + b(b^2+1)(\sin 2\beta\beta \cdot b_{8i} + \cos 2\beta\beta \cdot b_{10i}) + c(c^2-1)(\sin 2c\beta \cdot b_{11i} - \cos 2c\beta \cdot b_{12i})$$

$$\delta_i = a^2(a^2+1)(\cos 2\alpha\beta \cdot b_{7i} + \sin 2\alpha\beta \cdot b_{9i}) + b^2(b^2+1)(\cos 2\beta\beta \cdot b_{8i} + \sin 2\beta\beta \cdot b_{10i}) + c^2(c^2-1)(\cos 2c\beta \cdot b_{11i} + \sin 2c\beta \cdot b_{12i})$$

(\$i = 1, 2, \dots, 6\$)

3. 算例

中心角 \$2\beta = 60^\circ\$ の円弧部材に対して作製した係数表の一部を示し簡単な算例として二ヒンジアーチの最低次対称振動の固有振動数と求める。



A 端: \$V_A = W_A = 0, \Xi_A = 0\$

B 端: \$V_B = W_B = 0, \Xi_B = 0\$

\$\lambda\$	\$\alpha_1, -\beta_1\$	\$\alpha_2, \beta_2\$	\$\alpha_3, -\beta_3\$	\$\alpha_4, -\beta_4\$	\$\alpha_5, \beta_5\$	\$\alpha_6, -\beta_6\$	\$\delta_1, \delta_4\$	\$\delta_2, -\delta_5\$	\$\delta_3, \delta_6\$	\$\delta_4, \delta_1\$	\$\delta_5, -\delta_2\$	\$\delta_6, \delta_3\$
3	-42.65	-30.53	-8.529	49.02	-22.53	2.734	250.2	151.5	33.53	-270.2	151.5	-22.53
4	-39.70	-26.85	-8.156	47.32	-23.82	3.136	202.2	109.6	29.85	-237.7	157.4	-23.82
5	-33.06	-18.01	-7.248	43.75	-27.40	3.477	76.74	-3.299	21.01	-148.2	176.1	-27.40
6	-18.89	4.245	-4.825	37.74	-37.24	5.364	-115.6	-249.7	-1.245	-41.57	249.7	-37.24
7	23.73	115.6	8.689	41.32	-130.5	17.43	-629.7	-124.6	-112.6	76.02	722.8	-130.5
8	13.99	-73.17	-7.118	-50.19	151.5	114.6	-897.9	150.7	76.17	106.4	-1113	120.6
9	147.6	39.64	-6.996	-151.5	114.6	-10.73	-249.3	-1325	-31.64	252.9	-1325	114.6
10	6834	3537	272.5	-6822	3562	-285.2	-84750	-45370	-3534	86330	-44410	3562
11	-266.4	-132.8	-20.77	278.8	-169.0	12.77	1848	332.3	135.8	-2136	2115	-169.0
12	-92.03	7.175	-10.77	165.6	-150.2	11.29	-885.4	-1864	-4.179	-575.4	1864	-150.2
13	97.25	348.6	13.07	173.5	-377.7	27.41	-4154	-7047	-345.5	-272.9	5223	-377.7
14	-24.78	-306.0	-35.63	-177.7	372.7	-25.58	-3375	1348	309.2	5386	-5829	372.7
15	274.7	43.85	-13.40	-344.1	267.7	-16.26	-7583	-4444	-40.19	7130	-4444	267.8
16	2387	1167	47.30	-2377	1234	-67.60	-47080	-25870	-1163	47430	-22770	1234

$$\text{また端モーメント} \quad M_A = M_B = 0 \quad \therefore M_A = -\frac{EI}{R^2} (-\alpha_3 R\Theta + \alpha_4 R\Theta) = 0, \quad M_B = -\frac{EI}{R^2} (-\beta_3 R\Theta + \beta_6 R\Theta) = 0$$

したがって、\$\alpha_3 = \alpha_6, \beta_3 = \beta_6\$ と成立させる \$\lambda\$ 値をより読み取り

$$\text{角振動数} \quad \omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{PR^2}} = (8.75)^2 \sqrt{\frac{EI}{PR^2}} = 76.56 \sqrt{\frac{EI}{PR^2}} \quad \text{とする。}$$

4. あとで、円弧部材を含むラーメン型などの振動解析は動合式と直合条件式とを考慮すればよく、この手法は直線ラーメンの場合と同様にある。なお紙面の都合上係数表の一部にのみ示したものの、より詳しくは詳細値と求め同時にそのグラフも作ってあげれば、より正確な解と迅速に求めることができる。

参考文献 (1) Walting "Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern" Ing. Arch. Bd. 5 (1934) 5429 ~ 449

(2) 水原旭 "高層架構における振動曲線の計算例" 建築雑誌 昭和4年

小野薫 "振動振角法とその実用化" 建築学会大会論文集 BB 昭和12年