

金沢大学工学部 正員 喜内 敏

(1) 概要

熱傳導の偏微分方程式の数値解法に高橋喜彦氏が考案された方法を用いて, 著者は以前土木学会第8回年次学術講演会(昭和27年)において, 梁及び弾性支床にある梁について「弾性支床にある梁の撓み振動のある数値解法について」の標題にて発表したが, 今回はこの方法を軸方向力をうける場合にも応用できるように拡張した公式を誘導して示したものである。すなわち, 振動を示す偏微分方程式を数値積分の式に置きかえ, 初期条件及び境界条件を満足する, ある瞬間の変位がわかれば, これよりこの数値積分の式を用いて順次ある時間経過した振動中の変位を求めることができる。なお, 振動中の梁などを境界条件を満足させる方法としては点対称, 写像, その他の方法が考えられ, 軸方向力をうける場合も同様に考えればよい。

(2) 公式の誘導

軸方向力をうける梁(柱, 杭)の振動方程式は一般に次のように示される。ただし, 外力としての強制力は含まない。これらについては変位に置きかえ, 公式の中に入れて数値積分を行えばよい。なお, 梁や柱の場合に限らず, 同様な型式の微分方程式の場合, この方法が用いられる。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial t^2} + 2k \frac{\partial y}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \lambda^2 y = 0, \quad (1)$$

ここに, $y = y(x, t)$ = 梁の x 点における t 時の撓み, k = 梁又は柱の減衰係数, $a = \left(\frac{EIg}{A\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \frac{N\gamma}{A\gamma}$, $\lambda = \left(\frac{2\gamma}{A\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, E = 梁又は柱の材料のヤング係数, I = 梁又は柱の断面二次モーメント, g = 重力の加速度, A = 梁又は柱の断面積, γ = 梁又は柱の単位体積の重量, N = 軸方向力(圧縮力のとき正, 引張力のとき負とする), γ = 梁のときは地盤反力係数, 杭のときは横方向地盤反力係数, $A\gamma/g = \rho$ = 梁又は柱の単位長さ当りの質量,

高橋喜彦氏の方法にしたがい, $y(x+\xi, t)$, $y(x-\xi, t)$ などと展開し, 区間 ξ の間で積分し, この式について $O(\xi^6)$ 及び $O(\xi^2)$ を無視し, なお多少計算を行えば次のように書くことができる。ここに, O は Landau の記号を示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &= \frac{720}{\xi^6} \int_0^\xi \xi \{y(x+\xi, t) + y(x-\xi, t)\} d\xi - \frac{540}{\xi^5} \int_{-\xi}^\xi y(x+\xi, t) d\xi + \frac{360}{\xi^4} y(x, t), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{30}{\xi^3} \int_{-\xi}^\xi y(x+\xi, t) d\xi - \frac{36}{\xi^4} \int_0^\xi \xi \{y(x+\xi, t) + y(x-\xi, t)\} d\xi - \frac{24}{\xi^2} y(x, t), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{2}{\tau^2} \left\{ \frac{1}{2} y(x, t+\tau) + \frac{1}{2} y(x, t-\tau) - y(x, t) \right\}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2\tau} \{y(x, t+\tau) - y(x, t-\tau)\}, \end{aligned}$$

上の各式において, $y(x, t+\tau)$ は $t+\tau$ 時における x 点の撓み, $y(x, t-\tau)$ は $t-\tau$ 時における x 点の撓み, $y(x+\xi, t)$ は t 時における $x+\xi$ 点の撓み, $y(x-\xi, t)$ は t 時における $x-\xi$ 点の撓みを示す。これらの式を(1)式に代入し, 条件を考慮して撓みの式と求めると次式をうる。

$$\begin{aligned} y(x, t+\tau) &= \left\{ \left(\frac{540 \cdot a^2}{\xi^5} - \frac{30 \cdot b}{\xi^3} \right) \int_{-\xi}^\xi y(x+\xi, t) d\xi + \left(\frac{36 \cdot b}{\xi^4} - \frac{720 \cdot a^2}{\xi^6} \right) \int_0^\xi \xi \{y(x+\xi, t) + y(x-\xi, t)\} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{k}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} \right) y(x, t-\tau) \right\} / \left(\frac{k}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} \right), \quad (2) \end{aligned}$$

なお、数値積分の積分区間 S は次の値である。

$$S = \sqrt{\frac{\pm 6\sqrt{4b^2 + 10(\frac{2}{\tau^2} - \lambda^2)a^2} - 12 \cdot b}{(\frac{2}{\tau^2} - \lambda^2)}} \quad (3)$$

S の値は実際に負になることはないので、数値積分を実施する場合は軸方向力の正、負を考慮して、 S の値と正になるように選ぶ必要がある。(1)、(2)及び(3)式より次の各式を求めることができる。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \lambda^2 y = 0 \quad (4)$$

のとき、 S の値は(3)式と同一であるが、 $y(x, t+\tau)$ は次式となる。

$$y(x, t+\tau) = 2^2 \left\{ \left(\frac{540 \cdot a^2}{5^5} - \frac{30 \cdot b}{5^3} \right) \int_S^5 y(x+\xi, t) d\xi + \left(\frac{36 \cdot b}{5^4} - \frac{720 \cdot a^2}{5^6} \right) \int_0^S \{ y(x+\xi, t) + y(x-\xi, t) \} d\xi - \frac{1}{\tau^2} y(x, t-\tau) \right\} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2k \frac{\partial y}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \lambda^2 y = 0 \quad (6)$$

$$\text{のとき,} \quad y(x, t+\tau) = \frac{(2-\tau^2 \lambda^2)}{(1+k\tau)S} \left\{ \frac{3}{2} \int_S^5 y(x+\xi, t) d\xi - \frac{2}{S} \int_0^S \{ y(x+\xi, t) + y(x-\xi, t) \} d\xi \right\} - \frac{1-k\tau}{1+k\tau} y(x, t-\tau) \quad (7)$$

$$\text{あるいは,} \quad y(x, t+\tau) = \frac{(2-\tau^2 \lambda^2)}{(1+k\tau)S} \left\{ \int_0^S \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{S} \xi \right) y(x+\xi, t) d\xi - \int_0^S \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{S} \xi \right) y(x+\xi, t) d\xi \right\} - \frac{1-k\tau}{1+k\tau} y(x, t-\tau) \quad (8)$$

$$\text{ただし,} \quad S = \sqrt{\frac{360 \cdot a^2 \tau^2}{2 - \lambda^2 \tau^2}} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \lambda^2 y = 0 \quad (10)$$

$$\text{のとき,} \quad y(x, t+\tau) = \frac{(2-\tau^2 \lambda^2)}{S} \left\{ \frac{3}{2} \int_S^5 y(x+\xi, t) d\xi - \frac{2}{S} \int_0^S \{ y(x+\xi, t) + y(x-\xi, t) \} d\xi \right\} - y(x, t-\tau) \quad (11)$$

$$\text{あるいは,} \quad y(x, t+\tau) = \frac{(2-\tau^2 \lambda^2)}{S} \left\{ \int_0^S \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{S} \xi \right) y(x+\xi, t) d\xi - \int_0^S \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{S} \xi \right) y(x+\xi, t) d\xi \right\} - y(x, t-\tau) \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2k \frac{\partial y}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (13)$$

$$\text{のとき,} \quad y(x, t+\tau) = \frac{1}{(1+k\tau)S} \left\{ \int_0^S \left(3 - \frac{4}{S} \xi \right) y(x+\xi, t) d\xi - \int_0^S \left(3 + \frac{4}{S} \xi \right) y(x+\xi, t) d\xi \right\} - \frac{1-k\tau}{1+k\tau} y(x, t-\tau) \quad (14)$$

$$\text{ただし,} \quad S = \sqrt{180} \cdot \sqrt{a\tau} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (16)$$

$$\text{のとき,} \quad y(x, t+\tau) = \frac{1}{S} \left\{ \int_0^S \left(3 - \frac{4}{S} \xi \right) y(x+\xi, t) d\xi - \int_0^S \left(3 + \frac{4}{S} \xi \right) y(x+\xi, t) d\xi \right\} - y(x, t-\tau) \quad (17)$$

ただし、 S の値は(15)式と同一である。上にもとめて右公式より、 $y(x, t)$ の τ 時間前の値及びある瞬間 t における値がわかつているとき、 τ 時間後の値を求めることができる。

参考文献

- ・高橋喜寿：波動拡散及び熱伝導の図式解法，気象集誌オ2輯オ19巻オ8号
- ・本間正作：高橋喜寿氏の方法に依る波動方程式の一般値的解法，気象集誌オ2輯オ19巻オ9号
- ・日高孝次：高橋喜寿氏の方法と応用数学，海と空オ21巻オ10号
- ・押田勇雄：熱伝導に対する高橋の図式解法の改良に就て，気象集誌オ2輯オ21巻オ4号，その他