

大阪市大 正員 倉田 宗章

明石高専 正員 高 端 宏 直

大阪市大 正員 谷 平 勉

1. 概要……弾性基礎上のはりや板は従来種々の方法で解かれているが負の反力を考えた場合がほとんどである。今回は負の反力を考えない場合の一例として弾性基礎上の無限長のはりに1集中荷重が下方に作用した場合を解析し従来の方と比較検討した。

2. 線型問題と非線型問題の限界……従来の方と異なる点は (1) 負の反力が存在しない。(2) 自重を考慮せねばならない。(3) 境界値(変位0の点)が荷重の増減に従い移動する非線型問題となる。以上の3点で、たとえば集中荷重Pがのる弾性基礎上のはりについて従来のように自重を無視すると図-1のようにすりかち状となり両端は直線的に無限にのびるが本文では常に自重を考慮することにする。たわみ曲線および荷重とたわみの曲はモーメントは次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{PA}{2k} \frac{1}{\sinh \lambda l} \left[\cosh \lambda x \cos \lambda x - \sinh \lambda x \sin \lambda x + \cosh \lambda x \cosh (\pi - \lambda x) + \sinh \lambda x \sinh (\pi - \lambda x) \right] \\ y_c &= \frac{PA}{2k} \frac{\cosh \pi + 1}{\sinh \pi}, \quad M_c = \frac{P}{4\lambda} \frac{\cosh \pi + 1}{\sinh \pi} \quad \text{ただし } \lambda = \sqrt{k/4EI} \end{aligned} \right\} \text{---(1)}$$

1集中荷重が作用する場合の従来の解法は次式で表わされPとyは1次関係にある。

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{PA}{2k} A_{\lambda x}, \quad i = -\frac{PA^2}{k} B_{\lambda x}, \quad M = \frac{P}{4\lambda} C_{\lambda x}, \quad Q = -\frac{P}{2} D_{\lambda x} \\ \text{ただし } A_{\lambda x} &= e^{\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x), \quad B_{\lambda x} = e^{\lambda x} \sin \lambda x, \quad C_{\lambda x} = e^{\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x), \quad D_{\lambda x} = e^{\lambda x} \cos \lambda x \end{aligned} \right\} \text{---(2)}$$

またこの曲線は $x=0$, $x=\pi/\lambda$ で $y_{\max}$, $y_{\min}$ を与える。

$$y_{\max} = [y]_{x=0} = \frac{PA}{2k}, \quad y_{\min} = [y]_{x=\pi/\lambda} = -\frac{PA}{2e^k} \text{---(3)}$$

それぞれこの点のモーメントは $[M]_{x=0} = \frac{P}{4\lambda}$, $[M]_{x=\pi/\lambda} = -0.0108 \frac{P}{\lambda}$

こゝで δ の影響を考えると (ただし) $y = \frac{PA}{2k} A_{\lambda x} + \frac{\delta}{k}$ --- (4)

つぎに図-3を参照して(1)線において浮上っている部分(AB)

には反力が存在しないので全体として非線型問題となる。(2)線の場合は浮上り現象はなく復元は level に接する。さらには δ が増大すると線型問題となる。いずれの場合も x 軸に平行な δ/k 線に収束する。こゝでその限界を求めると

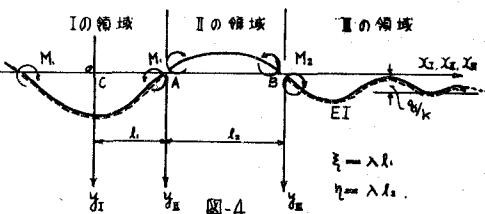
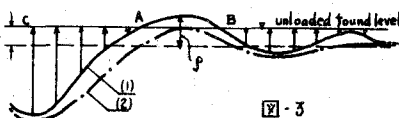
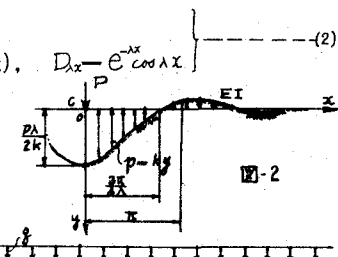
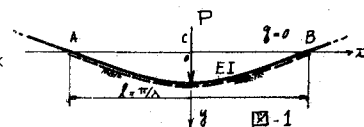
非線型の場合 $\delta > \delta/k$, 線型の場合 $\delta \leq \delta/k$ となり

(3)式を用いて $\delta = |y_{\min}| - \frac{PA}{2e^k} \leq \frac{\delta}{k} \therefore \delta \geq 0.02161 PA$

また $\delta = \alpha PA$ --- (5) とおくと

$\alpha \geq 0.02161$ …線型, $0 \leq \alpha < 0.02161$ …非線型となる。

3. 解法……図-4に示すようにI(両端鉸), II(単純はり), III(1端鉸の半無限長のはり)の各領域に使用記号 P; 集中荷重(kg) δ ; 等分布荷重(kg/m) p ; 地盤反力(kg/m) k ; 基礎のはね常数(kg/m) y ; たわみ i ; たわみ角 λ, l ; 長さ(cm) EI ; 曲げモーメント(kg-cm) M ; せん断力(kg)



に区分しその境界に不連続力 M_1, M_2 を作用させる。いずれも P, g, M_1, M_2 のいずれかが組合さって作用する弾性基礎の上のはりまたは単純ばり K 帰着できる。 CA, AB 間を各々 l_1, l_2 ($\xi=\lambda l_1, \eta=\lambda l_2$ と置く)としてⅠ,Ⅱ,Ⅲ領域の解式を求め境界条件に代入する。まず各領域の必要な諸量を求めると、

$$\text{Ⅰの領域} \quad \left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{P\lambda}{2K} y_3 + \frac{g}{K} (1-2y_3) + \frac{4M_1\lambda^2}{K} y_1, & M_1 &= \frac{P}{4\lambda} y_4 + \frac{g}{\lambda^2} y_1 + 2M_1 y_3 \\ i_1 &= -\frac{2P\lambda^2}{K} y_1 - \frac{g\lambda}{K} y_3 - \frac{2M_1\lambda^2}{K} y_4, & Q_1 &= -P y_1 - \frac{g}{2\lambda} y_4 + M_1 \lambda y_3 \end{aligned} \right\} \text{----- (6)}$$

$$\text{Ⅱの領域} \quad \left. \begin{aligned} i_2 &= \frac{g\lambda}{6K} \eta^2 + \frac{2}{3} \frac{\lambda^2}{K} \eta (2M_1 + M_2), & i_3 &= -\frac{g\lambda}{6K} \eta^2 - \frac{2}{3} \frac{\lambda^2}{K} \eta (M_1 + 2M_2), \\ Q_2 &= \frac{g}{2\lambda} \eta - \lambda \frac{(M_1 - M_2)}{\eta}, & Q_3 &= -\frac{g}{2\lambda} \eta - \lambda \frac{(M_1 - M_2)}{\eta} \end{aligned} \right\} \text{----- (7)}$$

$$\text{Ⅲの領域} \quad \left. \begin{aligned} i_4 &= -\frac{g}{K} (g + 2M_2 \lambda^2), & Q_4 &= \frac{g}{2\lambda} - M_2 \lambda \end{aligned} \right\} \text{----- (8) (いずれも左向きの一様式等は省略する)}$$

境界条件としての A, B 両支支の左右のたわみ角せん断力の連続、(6)式より次式が成立せねばならない。

$$\left. \begin{aligned} i_1^+ &= i_1^- \longrightarrow a_1(\xi)\eta^5 + b_1(\xi)\eta^4 + c_1(\xi)\eta^3 + d_1(\xi)\eta^2 + e_1(\xi)\eta + f_1(\xi) = 0 \\ Q_1^+ &= Q_1^- \longrightarrow a_2(\xi)\eta^5 + b_2(\xi)\eta^4 + c_2(\xi)\eta^3 + d_2(\xi)\eta^2 + e_2(\xi)\eta + f_2(\xi) = 0 \\ i_3^+ &= i_3^- \longrightarrow \frac{g\lambda}{6K} \eta^2 + \frac{2}{3} \frac{\lambda^2}{K} \eta (M_1 + 2M_2) = -\frac{g}{K} (g + 2M_2 \lambda^2), & Q_2^+ &= Q_2^- \longrightarrow \frac{g}{2\lambda} \eta + \lambda \frac{(M_1 - M_2)}{\eta} = M_2 \lambda - \frac{g}{2\lambda} \end{aligned} \right\} \text{----- (9)}$$

$$\begin{aligned} a_1(\xi) &= \alpha, & b_1(\xi) &= g\lambda, & c_1(\xi) &= 15\lambda(1+g\lambda), & d_1(\xi) &= -6(2g\lambda + d_2 - 5d_3 - 4d_4), & e_1(\xi) &= -18(2g\lambda + d_2 - 2d_3 - d_4), & f_1(\xi) &= -18(2g\lambda + d_2 - d_3) \\ a_2(\xi) &= 0, & b_2(\xi) &= \alpha g\lambda, & c_2(\xi) &= \alpha(3g\lambda + 3), & d_2(\xi) &= 2(2g\lambda + \alpha g\lambda + 5d_3 + 6d_4), & e_2(\xi) &= -6(2g\lambda + d_2 + 2d_3 + 3d_4), & f_2(\xi) &= -6(2g\lambda + d_2 + d_3 + 2d_4) \end{aligned}$$

以上4式より M_1, M_2, ξ, η を求めることができる。

4. 従来の解法との比較検討……(6)式より求めた ξ, η, M_1, M_2 と α の関係を図-5に示した。図-6はそれらの

の値を用いて α の種々の値 K について描いた弾性曲線である。実線は $g=0$ すなわち $\alpha=0$ の場合の従来の方法(2)式より求めたもの、今回の方法と比較する K は各場合について g/K を上下に平行移動すればよい。(4)線は限界線と表わす。図-7は α と集中荷重下のたわみ、曲げモーメント、最大浮上量との関係を示した。これらより g および M_0 は $\alpha=0.003$ で約16%, $\alpha=0$ で約9%の差がみられる。また浮上量は $\alpha=0.01$ で従来の方法の値の約3倍, $\alpha=0.003$ で約7.9倍となっている。参考まで K のバると鉄道の一般軌道 $\alpha \approx 0.0035$ である。

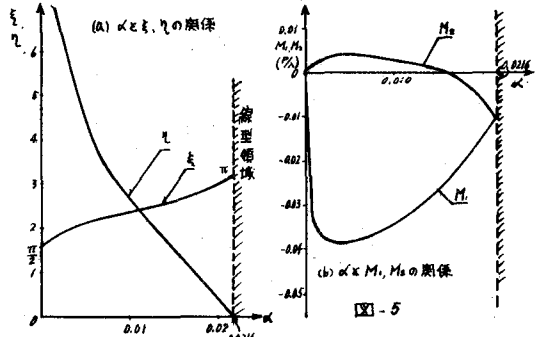


図-6 たわみ曲線 $\alpha=0$ (1)式 $\alpha=0.003$ $\alpha=0.01$ $\alpha=0.0216$ (4)式 $g=0$ (2)式

結論として

(1) 実用上からは $\alpha > 0.0025$ ではたわみと曲げモーメントは従来の方法で行って大きな差異はない。

(2) 浮上量や、浮上りを生じている区間を問題にする場合には従来の方法では大きな誤差を生ずるので検討の要がある。

以上の理論解に対する実験は現在計画中である。

