

北大工学部 正員 芳村 仁
建設省 正員 加賀田晋成
北大工学部 学生員 井上 興治

1) はしり付平板と縦横に桁が密に配置された格子構造の平板に置き換えて解析する時、与えられた構造が、考えられる断面力のうち一つの方向のはりモーメントに対する抵抗があまり期待できないような場合が考えられる。この報告は一方の抵抗はりモーメントとし、時の平板の曲げの問題を異方性扇形平板と主に検討した。荷重が等分布荷重と集中荷重の場合、二直線辺単純支持・二円弧辺自由の場合につき横折方向の M_{θ} と考えた時（たとえば格子構造を考え、主桁に対し横折の振りに対する抵抗が期待できない時）すべての抵抗はりモーメントを考慮した時のものとを比較し、たわみ及び曲げモーメントに及ぼす影響をみることにできた。

2) 基本微分方程式 M_{θ} = 接線方向の曲率, N_r = 放射方向の曲率
 $N = \sqrt{N_r^2 + N_{\theta}^2}$ とし、その間の関係は $N_{\theta}/N_r = C^2$ とし $M_{\theta} = 0$ として釣合い式を求める

$$-p = \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_{\theta}}{\partial r \partial \theta} \quad (1)$$

となる。たわみ w とすれば断面モーメントは次のようになる。

$$\begin{aligned} M_r &= -N_r \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_0 \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right\} \\ M_{\theta} &= -N_{\theta} \left\{ \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} \quad M_{\theta r} = -(1-\nu)N \left\{ -\frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

これを(1)式に代入すれば基本微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2+\nu_0+C^2\nu_r}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{\nu_0+C^2\nu_r+C(1-\nu)}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2\nu_0+C(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2\nu_0+2C^2+C(1-\nu)}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ + \frac{C^2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{C^2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{C^2}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{p}{N_r} \quad (3) \end{aligned}$$

この基本微分方程式を有限 Fourier Sine 変換すれば、

$$\frac{d^4 w_{\beta}}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_{\beta}}{dr^3} - \frac{\beta^2(C+\nu_0)+C^2}{r^2} \frac{d^2 w_{\beta}}{dr^2} + \frac{\beta^2(C+\nu_0)+C^2}{r^3} \frac{dw_{\beta}}{dr} + \frac{\beta^2 C - \beta^2(C^2+C+\nu_0)}{r^4} w_{\beta} = \frac{S(p(r, \theta))}{N_r} \quad (4)$$

となる。この微分方程式を解けば w_{β} が求まり、たわみ w は w_{β} の逆変換として次のようになる。

$$w(r, \theta) = \frac{1}{\alpha} \sum w_{\beta}(r, \beta) \sin \beta \theta, \quad \beta = \frac{n\pi}{\alpha}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

(4) 式の同次式の解は、 $r = \rho b$, $w_{\beta} = \rho^{\lambda}$ としポアソン比を 0 と考えると

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + (5-C^2-C\beta^2)\lambda^2 + 2(C^2+C\beta^2-1)\lambda + \beta^2(\beta^2 C^2 - 2C^2 - C) = 0 \quad (6)$$

となり 4 個の根は一般には 2 組の共役複素根として表わされる。

$$\lambda_1 = A_1 \pm B_1 i, \quad \lambda_2 = A_2 \pm B_2 i$$

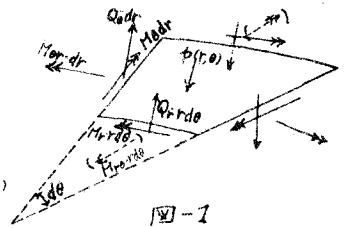
従って同次解は次のように表わされる。

$$w_{\beta 0} = \rho^{A_1} (C_1 \cos(B_1 \ln \rho) + C_2 \sin(B_1 \ln \rho)) + \rho^{A_2} (C_3 \cos(B_2 \ln \rho) + C_4 \sin(B_2 \ln \rho)) \quad (7)$$

特解は

$$w_{\beta p} = \frac{S(p, \beta)}{Q N_r} \rho^G, \quad Q = 72 - 8C^2 - \beta^2(9C + 2C^2 - \beta^2 C^2)$$

となる。従って $w_{\beta} = w_{\beta 0} + w_{\beta p}$ となりたわみ w はその逆変換として次のように表わされる。



$$W(r, \theta) = -\frac{r^4}{\alpha} \sum \frac{p b^4}{N_f} \left\{ p^4 (\cos(B_1 \ln p) Y_1 + \sin(B_1 \ln p) Y_2) + p^{4\alpha} (\cos(B_2 \ln p) Y_3 + \sin(B_2 \ln p) Y_4) \right. \\ \left. - \frac{S(p)}{p Q} p^4 \right\} \sin p \theta, \quad -\frac{N_f}{p b^4} C_i = Y_i \quad \text{--- (8)}$$

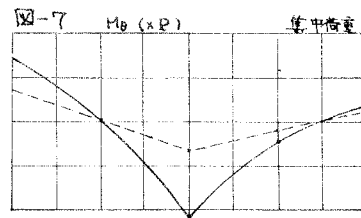
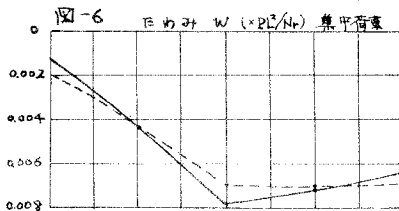
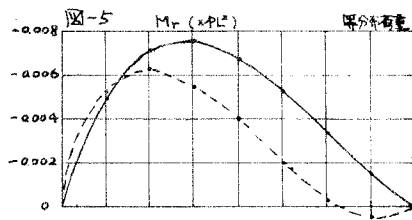
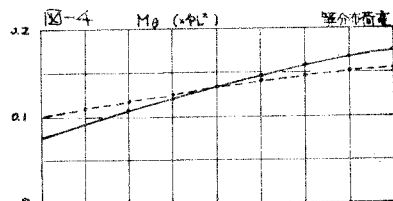
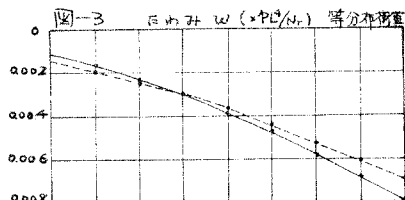
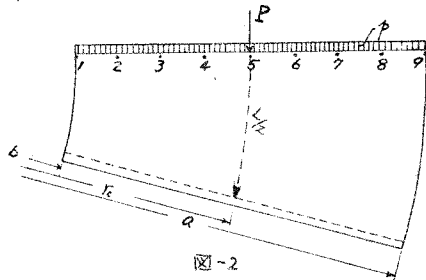
断面モーメントは、(8)式を(5)式に代入すれば得られる。

3) 数値計算例 (i) 等分布荷重荷重の作用した場合 (a) に於ける $S(p(r, \theta))$ は $S(p(r, \theta)) = (1 - (-1)^n) p / \beta$ とする。従って辺比(直線辺/中央内弧長) = 1, $C=2$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 直線辺単純支持, 内弧辺自由の境界条件をもつ扇形平板では、境界条件から未定係数 $Y_1 \sim Y_4$ が決定され、その下り及び断面モーメントを、捩りモーメントを 0 としない場合の断面力と比較すれば、図-3、図-4、図-5 のようになる。

(ii) 集中荷重の作用した場合、荷重載荷点のところで平板を2板に分けると、それぞれの板について微分方程式が成り立ち、それは(4)式の同次式として表わされる。従って下り W は(8)式の常数項を除いたものと一致し、他の断面モーメントも求める。2板の平板として計算を行つたので未定係数は $Y_1 \sim Y_6$ まで、8個であるが4個は境界条件から、他の4個は切断箇所の連続の条件 ($r=r_0$ に於て $W_1=W_2$, $\frac{\partial W_1}{\partial r} = \frac{\partial W_2}{\partial r}$, $M_{r1}=M_{r2}$, $Q_{r1}-Q_{r2}=P$) から求められる。境界条件、辺比などは等分布荷重と同様の条件として得た結果は、図-6、図-7 に示されている。なお級数は $n=1 \sim 14$ までの値をとった。

4) 考察、計算結果から M_{r0} を 0 とした場合に起さる特性点のような点について考察してみた。即ち平板の内側と外側の断面力の比をとってみると、等分布荷重載荷状態では $M_{r0}=0$ とした場合に $W_{in}/W_{out} = 6.614$, $M_{\theta in}/M_{\theta out} = 2.400$ であるのに対し M_{r0} を含んだ方には $W_{in}/W_{out} = 4.406$, $M_{\theta in}/M_{\theta out} = 1.524$ 集中荷重載荷状態では同様に $W_{in}/W_{out} = 5.536$, $M_{\theta in}/M_{\theta out} = 2.965$ に対し M_{r0} を含んだ方は 3.504, 1.395, という値を示した。つまり $M_{r0}=0$ とした場合その比が一般に大きく曲線の勾配が急になっている。このように M_{r0} を抵抗しないため r 方向の平板としての作用が、 M_{r0} を考慮した時より小さくなっていることが判る。紙面の都合で限られた計算例だけについて述べたが、一方向の抵抗捩りモーメントが平板の下り及び曲げモーメントにどの程度影響を及ぼすかが判った。

リ芳村仁：曲線直交異方性扇形平板の曲げについて



— M_{r0} を考慮した場合
- - - M_{r0} を無視した場合