I－13　二方向連続直交異方性矩形板の解法

九州大学　工学部　正　員　山崎徳也
〃　　〃　　正　員　樗木　武
〃　　大学院　学生員○横田　漠

I. 緒言

連続矩形板の解法に関しては，岡元[1]，成岡[2]氏等の一対辺単純支持の一方向連続板の研究や，ポアソン比が零でかつ等分布荷重を受ける二方向連続板に関する東氏[3]の報文があるが，本論文は先に著者等が発表した[4]任意垂直荷重を受け，ポアソン比の項をも含めた二方向連続の等方性等断面矩形板の解法に引き続き，さらに同一手法を発展させ二方向連続の直交異方性等断面矩形板を取り扱ったものである。

II. たわみ角—端モーメント関係式の誘導

1). 弾性曲面

直交異方性平面板の基礎微分方程式は次式で表わされる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+K_1^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+K_2^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w=\frac{p(x,y)}{D_x} \quad \text{-------- (1)}$$

ただし　$K_1^2=K^2+\sqrt{K'^4-K^2}$，$K_2^2=K'^2-\sqrt{K'^4-K^2}$，$K^2=\frac{D_y}{D_x}$，$K'^2=\frac{1}{2}\left(\nu_y+K^2\nu_x+\frac{4c}{D_x}\right)$，$D_y=\frac{E_y\cdot h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)}$，$D_x=\frac{E_x\cdot h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)}$

$c=\frac{G\cdot h^3}{12}$，G：ねじり剛性，h：板の厚み，ν_x,ν_y：x,y方向のポアソン比，w：板の垂直たわみ，

$p(x,y)$：板に作用する任意垂直荷重強度

式(1)の特殊解をw_0，余函数をw_1とすれば，一般解wは次式で表わされる。　$w=w_1+w_0$ ------(2)

今w_0を次のごとく仮定する。　$w_0=\sum_m\sum_n f_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$ -------- (3)

また$p(x,y)$を二重正弦フーリエ級数で近似すれば次の通りである。

$$p(x,y)=\sum_m\sum_n R_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \quad \text{------- (4)} \qquad \text{ただし}\quad R_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\!\!\int_0^b p(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy\,dx$$

式(3),(4)を式(1)に代入すればf_{mn}は次のように求まる。　$f_{mn}=\frac{R_{mn}}{D_x(\alpha_m^2+K_1^2\beta_n^2)(\alpha_m^2+K_2^2\beta_n^2)}$ ----(5)

他方w_1については次式を仮定する。　$w_1=\sum_m Y_m(y)\sin\frac{m\pi}{a}x+\sum_n X_n(x)\sin\frac{n\pi}{b}y$ --------- (6)

式(6)を式(1)の斉次方程式に代入すれば，$X_n(x)$，$Y_m(y)$が求まり次のごとくなる。

$$X_n(x)=A_n^X\sinh K_1\beta_n x+B_n^X\cosh K_1\beta_n x+C_n^X\sinh K_2\beta_n x+D_n^X\cosh K_2\beta_n x,$$

$$Y_m(y)=A_m^Y\sinh\frac{\alpha_m}{K_1}y+B_m^Y\cosh\frac{\alpha_m}{K_1}y+C_m^Y\sinh\frac{\alpha_m}{K_2}y+D_m^Y\cosh\frac{\alpha_m}{K_2}y \quad \text{---------- (7)}$$

以上式(2),(3),(5),(6),(7)より直交異方性矩形板の弾性曲面wがえられ次式となる。

$$w=\sum_m\left(A_m^Y\sinh\frac{\alpha_m}{K_1}y+B_m^Y\cosh\frac{\alpha_m}{K_1}y+C_m^Y\sinh\frac{\alpha_m}{K_2}y+D_m^Y\cosh\frac{\alpha_m}{K_2}y\right)\sin\frac{m\pi}{a}x+\sum_n\left(A_n^X\sinh K_1\beta_n x+B_n^X\cosh K_1\beta_n x\right.$$
$$\left.+C_n^X\sinh K_2\beta_n x+D_n^X\cosh K_2\beta_n x\right)\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_n\frac{R_{mn}}{D_x(\alpha_m^2+K_1^2\beta_n^2)(\alpha_m^2+K_2^2\beta_n^2)}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \quad \text{------ (8)}$$

ただし　$A_m^Y\sim D_m^Y$，$A_n^X\sim D_n^X$は境界条件より求まる積分定数である。

2). たわみ角—端モーメント関係式

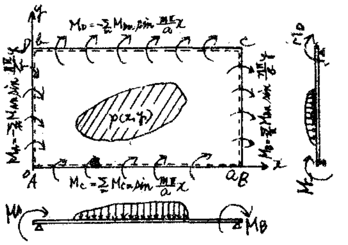
図－1に示す四辺単純支持の直交異方性矩形板に任意垂直荷重$p(x,y)$に加えて各支持辺に，端モーメントM_A,M_B,M_C,M_Dが作用し，支点沈下$\delta_A,\delta_B,\delta_C,\delta_D$を起す場合の境界条件は次のごとくである。

$\delta_A=(w)_{x=0}=\sum_n\delta_{An}\sin\frac{n\pi}{b}y$，　$M_A=-D_x\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\nu_y\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)_{x=0}=\sum_n M_{An}\sin\frac{n\pi}{b}y$，　$\delta_B=(w)_{x=a}=\sum_n\delta_{Bn}\sin\frac{n\pi}{b}y$

$M_B=-D_x\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\nu_y\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)_{x=a}=-\sum_n M_{Bn}\sin\frac{n\pi}{b}y$，　$\delta_C=(w)_{y=0}=\sum_m\delta_{Cm}\sin\frac{m\pi}{a}x$，　$M_C=-D_y\left(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\nu_x\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)_{y=0}=\sum_m M_{Cm}\sin\frac{m\pi}{a}x$.

$$\delta_D=(w)_{y=b}=\sum_m \delta_{Dm}\sin\frac{m\pi}{a}x,\quad M_D=-D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b}=-\sum_m M_{Dm}\sin\frac{m\pi}{a}x \quad \text{-------}(9)$$

式(9)K式(8)を代入してえられる諸式を連立K解けば，$A_m^x\sim D_m^x$，$A_m^y\sim D_m^y$ が求まり，さらK式(8)K代入すれば図－1のごとき矩形板の弾性曲面 w がえられることとなる。



図－1

さて図－1K示す矩形板KおいてAD, BC辺Kおけるたわみ角は一般K y の函数であり，AB, DC辺Kおいては x の函数であるが，これらのたわみ角を代数函数で表わすことは困難であるので，フーリェ級数を用いて次のごとく近似する。

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}=\sum_n \theta_{An}\sin\frac{n\pi}{b}y,\quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a}=\sum_n \theta_{Bn}\sin\frac{n\pi}{b}y,\quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=\sum_m \theta_{Cm}\sin\frac{m\pi}{a}x,\quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b}=\sum_m \theta_{Dm}\sin\frac{m\pi}{a}x \quad \text{---------}(10)$$

他方，さきK求められた $A_m^x\sim D_m^x$，$A_m^y\sim D_m^y$ を用いた w の x, y の第一次微係数を取り，各辺の座標値を代入すれば，各辺のたわみ角がえられるゆえ，これらを式(10)の左辺K代入すれば，$\theta_{An}\sim\theta_{Dm}$ と $M_{An}\sim M_{Dm}$，$\delta_{An}\sim\delta_{Dm}$ との関係式が求まり，演算の上整理すれば図－1のごとき矩形板で構成される二方向連続直交異方性板の解法K用いるたわみ角一端モーメント関係式が次のごとくえられる。

$$\theta_{An}=\frac{a(\gamma_n)M_{An}+b(\gamma_n)M_{Bn}}{D_x\beta_n(\kappa_1^2-\kappa_2^2)}+\sum_m\frac{2\alpha_m\beta_n(\kappa_1\kappa_2)^2\{M_{Cm}+(-1)^n M_{Dm}\}}{b\cdot D_y\cdot g(m,n)\cdot h(m,n)}+\frac{\beta_n\{c(\gamma_n)\delta_{An}+d(\gamma_n)\delta_{Bn}\}}{\kappa_1^2-\kappa_2^2}+\sum_m\frac{2\alpha_m\beta_n(\kappa_1\kappa_2)^2 l(m,n)\{\delta_{Cm}-(-1)^n\delta_{Dm}\}}{b\cdot g(m,n)\cdot h(m,n)}+\sum_m\alpha_m f_{mn}$$

$$\theta_{Bn}=\frac{b(\gamma_n)M_{An}+a(\gamma_n)M_{Bn}}{D_x\beta_n(\kappa_1^2-\kappa_2^2)}+\sum_m\frac{2(-1)^m\alpha_m\beta_n(\kappa_1\kappa_2)^2\{M_{Cm}+(-1)^n M_{Dm}\}}{b\cdot D_y\cdot g(m,n)\, h(m,n)}-\frac{\beta_n\{d(\gamma_n)\delta_{An}+c(\gamma_n)\delta_{Bn}\}}{\kappa_1^2-\kappa_2^2}+\sum_m\frac{2(-1)^m\alpha_m\beta_n(\kappa_1\kappa_2)^2 l(m,n)\{\delta_{Cm}-(-1)^n\delta_{Dm}\}}{b\cdot g(m,n)\cdot h(m,n)}+\sum_m(-1)^m\alpha_m f_{mn}$$

$$\theta_{Cm}=\sum_n\frac{2\alpha_m\beta_n\{M_{An}+(-1)^m M_{Bn}\}}{D_x\cdot a\cdot g(m,n)\, h(m,n)}+\frac{p(\lambda_m)M_{Cm}+q(\lambda_m)M_{Dm}}{D_y\cdot\alpha_m(1/\kappa_1^2-1/\kappa_2^2)}+\sum_n\frac{2\alpha_m\beta_n j(m,n)}{a\cdot g(m,n)\, h(m,n)}\{\delta_{An}-(-1)^m\delta_{Bn}\}+\frac{\alpha_m\{r(\lambda_m)\delta_{Cm}+s(\lambda_m)\delta_{Dm}\}}{1/\kappa_1^2-1/\kappa_2^2}+\sum_n\beta_n f_{mn}$$

$$\theta_{Dm}=\sum_n\frac{2(-1)^n\alpha_m\beta_n\{M_{An}+(-1)^m M_{Bn}\}}{D_x\cdot a\cdot g(m,n)\cdot h(m,n)}+\frac{q(\lambda_m)M_{Cm}+p(\lambda_m)M_{Dm}}{D_y\,\alpha_m(1/\kappa_1^2-1/\kappa_2^2)}+\sum_n\frac{2(-1)^n\alpha_m\beta_n j(m,n)}{a\cdot g(m,n)\, h(m,n)}\{\delta_{An}-(-1)^m\delta_{Bn}\}-\frac{\alpha_m\{s(\lambda_m)\delta_{Cm}+r(\lambda_m)\delta_{Dm}\}}{1/\kappa_1^2-1/\kappa_2^2}+\sum_n(-1)^n\beta_n f_{mn} \quad \text{-----}(11)$$

ただし
$$a(\gamma_n)=\frac{\kappa_1\cosh\kappa_1\gamma_n}{\sinh\kappa_1\gamma_n}-\frac{\kappa_2\cosh\kappa_2\gamma_n}{\sinh\kappa_2\gamma_n},\quad b(\gamma_n)=\frac{\kappa_1}{\sinh\kappa_1\gamma_n}-\frac{\kappa_2}{\sinh\kappa_2\gamma_n},\quad g(m,n)=\alpha_m^2+(\kappa_1\beta_n)^2,\quad h(m,n)=\alpha_m^2+(\kappa_2\beta_n)^2,$$

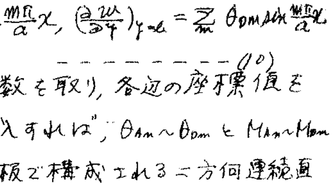
$$c(\gamma_n)=\frac{\kappa_1(\kappa_2^2-\nu_y)}{\tanh\kappa_1\gamma_n}-\frac{\kappa_2(\kappa_1^2-\nu_y)}{\tanh\kappa_2\gamma_n},\quad d(\gamma_n)=-\frac{\kappa_1(\kappa_2^2-\nu_y)}{\sinh\kappa_1\gamma_n}+\frac{\kappa_2(\kappa_1^2-\nu_y)}{\sinh\kappa_2\gamma_n},\quad l(m,n)=\beta_n^2+\alpha_m^2\left(\frac{1}{\kappa_1^2}+\frac{1}{\kappa_2^2}-\nu_x\right),\quad p(\lambda_m)=\frac{1}{\kappa_1\tanh\frac{\lambda_m}{\kappa_1}}-\frac{1}{\kappa_2\tanh\frac{\lambda_m}{\kappa_2}}$$

$$q(\lambda_m)=\frac{1}{\kappa_1\sinh\frac{\lambda_m}{\kappa_1}}-\frac{1}{\kappa_2\sinh\frac{\lambda_m}{\kappa_2}},\quad r(\lambda_m)=\frac{1/\kappa_2^2-\nu_x}{\kappa_1\tanh\frac{\lambda_m}{\kappa_1}}-\frac{1/\kappa_1^2-\nu_x}{\kappa_2\tanh\frac{\lambda_m}{\kappa_2}},\quad s(\lambda_m)=-\frac{1/\kappa_2^2-\nu_x}{\kappa_1\sinh\frac{\lambda_m}{\kappa_1}}+\frac{1/\kappa_1^2-\nu_x}{\kappa_2\sinh\frac{\lambda_m}{\kappa_2}},\quad j(m,n)=\alpha_m^2+\beta_n^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2-\nu_y)$$

Ⅲ．連続板の解法　文献(4)Kおいて示したごとく各節線Kおける節線モーメントの釣合条件式と，たわみ角の連続条件式とから次式をうる

$$M_{ikn}+M_{ijn}=0 \quad \text{-----}(12),\qquad \theta_{ikn}=\theta_{ijn} \quad \text{-----}(13)$$

(ただし M_{ikn}, M_{ijn} および θ_{ikn}, θ_{ijn} はそれぞれ ik, ij 矩形板の節線 $i-j$ 上の節線モーメントおよびたわみ角のフーリェ級数展開式の展開係数である。)



図－2

式(11)を式(13)K代入してえられる諸式と式(12)および，連続板の両端辺Kおける支持条件式とを連立K解けば図－2に示すごとき直交異方性の二方向連続板の所要解がえられる。

Ⅳ．結語　式(11)は未知数の単独項とその級数和で表わされ，連続板の解法は試算による収束計算を行う必要があり，かなり面倒であるが電算を用いればさして問題とするKはあたらない。本論文は二方向連続板の解法であるが，一対辺自由の一方向連続板および一辺自由の二方向連続板の解法Kも応用出来るもので，これらKついては他日発表の予定である。

(文献)　(1) 関北海；弾性梁K支持される連続版の解法並K弾性梁のねじりモーメントが連続版K及ぼす影響Kついて；土木学会論文集第19号，昭和29年4月，北海道土木試験所報告第15号，昭和31年7月

(2) 成岡昌夫；撓角撓度法Kよる一方向連続板の解法　土木学会論文集 第4号，昭和24年6月

(3) 東 洋一；連続版に関する研究(第1報)，建築学会研究報告第20号，連続版K関する研究(第2報)，建築学会研究報告第22号

(4) 山崎徳也，標木武，横田 漠；たわみ角一端モーメント関係式Kよる二方向連続板の解法　土木学会西部支部，昭和41年1月28日