Ⅰ－12　　一対辺自由な一方向連続矩形板の解法

九州大学工学部　正員　山崎徳也
九州大学工学部　正員〇樗木武

１．緒言　一方向連続矩形板の解法に関する既往の研究は，相対する２辺が単純支持される場合の成岡氏[1]，岡元氏[2]等の研究があるが，相対する２辺が全く任意の一方向連続矩形板の解法を取り扱った論文は未だ見当らない。本論文は著者等の連続板の解法に関する一連の研究の第一報として，先に発表した二方向連続矩形板[3]および一方向連続扇形板[4]の解法につづき，任意境界条件で任意垂直荷重が作用する一方向連続等方性等断面矩形板の厳密解法を，一対辺が自由な一方向連続板を主題として提示するものである。

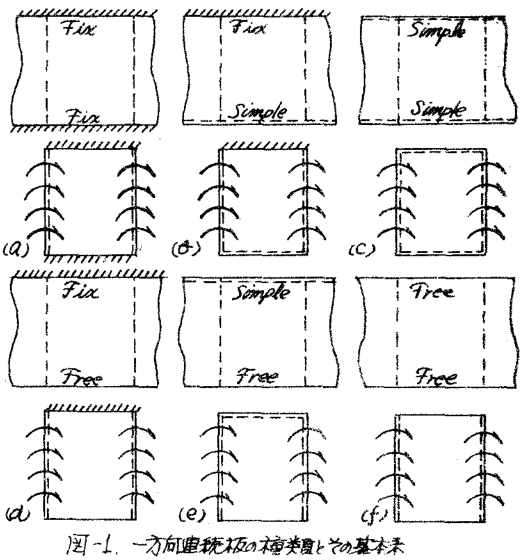
２．たわみ角－端モーメント関係式の誘導　任意垂直荷重 $p(x,y)$ が作用する等方性等断面平面板の基礎微分方程式 $\nabla^4 w=\frac{p(x,y)}{D}$ を満足するたわみ w の一般解は次式で与えられる[3]。

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(A_m^Y+B_m^Y\cdot y)\cdot\sinh\frac{m\pi}{a}y+(C_m^Y+D_m^Y\cdot y)\cdot\cosh\frac{m\pi}{a}y\right\}\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(A_n^X+B_n^X\cdot x)\cdot\sinh\frac{n\pi}{b}x+(C_n^X+D_n^X\cdot x)\cdot\cosh\frac{n\pi}{b}x\right\}\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_n\frac{R_{mn}}{D\pi^4\{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2\}^2}\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y \quad \cdots\cdots(1)$$

ただし，$A_m^Y\sim D_m^Y$，$A_n^X\sim D_n^X$ は境界条件より定まる積分定数，　a，b＝x，y 方向のスパン

D＝板剛度，　R_{mn}＝任意垂直荷重 $p(x,y)$ の二重正弦フーリエ級数展開式における展開係数

さて，一方向連続矩形板において，相対する２辺の境界条件は図－１(a)～(f)に示すごとく６通りで，任意の境界条件をもつ一方向連続板を解くためには，(a)～(f)の各基本系に対するたわみ角－端モーメント関係式をそれぞれ求める必要がある。図－１の基本系(a)，(b)，(c)に関しては，図－２に示すごとき矩形板に関するたわみ角－端モーメント関係式を求めれば，$\theta_{cm}=\theta_{Dm}=0$ で基本系(a)，$\theta_{Dm}=M_{cm}=0$ で基本系(b)，$M_{cm}=M_{Dm}=0$ で基本系(c)のたわみ角－端モーメント関係式がそれぞれ求まる。また基本系(d)，(e)に関しては，図－３に示すごとき矩形板が対応し，そのたわみ角－端モーメント関係式を求めれば，$\theta_{Dm}=0$ で基本系(d)，$M_{Dm}=0$ で基本系(e)のたわみ角－端モーメント関係式が求まる。基本系(f)に関しては，図－４の矩形板を解くことにより，そのたわみ角－端モーメント関係式が求まる。結局図－２～４に示す３種類の矩形板を解くことにより，図－１に示す



図－１．一方向連続板の種類とその基本系

６通りの基本系について，そのたわみ角－端モーメント関係式を全て求めうるが，このうち図－２，３については既に文献(3)において発表したので，本稿では図－４の場合のたわみ角－端モーメント関係式の誘導について述べる。　図－４に示す矩形板は，相対する２辺が自由で，他の２辺が単純支持であり，任意垂直荷重 $p(x,y)$ に加えて，それぞれの単純支持辺で端モーメント M_A，M_B が作用し，さらに支点沈下 δ_A，δ_B を起こすものとすれば，その境界条件は次の通りである。

$x=0$ で　$(w)_{x=0}=\delta_A=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{An}\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$，　$-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=M_A=\sum_{n=1}^{\infty}M_{An}\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$

$x=a$ で　$(w)_{x=a}=\delta_B=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{Bn}\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$，　$-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-M_B=-\sum_{n=1}^{\infty}M_{Bn}\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$　……(2)

$y=0,\ b$ で　それぞれ　$V_y=0$，　$M_y=0$

式(2)に式(1)を代入してえられる諸式を連立にとけば，積分定数 $A_m^{Y}\sim D_m^{Y}$，$A_n^{X}\sim D_n^{X}$ がもとめられ，式(1)の弾性曲面 w がえられるゆえ，これを用いて x に関する第一次微係数をとり，$x=0$，a を代入してそれぞれの単純支持辺におけるたわみ角を算出することができる．他方 $x=0$，a における x 方向のたわみ角は一般に y のみの函数であるから，これを正弦フーリエ級数展開式で近似すると，前記のたわみ w からえられるたわみ角との間に次の関係が成立する．

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_{An}\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y,\qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a}=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_{Bn}\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y \quad\text{---------(3)}$$

式(3)より θ_{An}，θ_{Bn} と M_{An}，M_{Bn}，δ_{An}，δ_{Bn} との関係式，すなわち，図－4に示すごとき矩形板のたわみ角－端モーメント関係式が求まり，次の結果をうる．

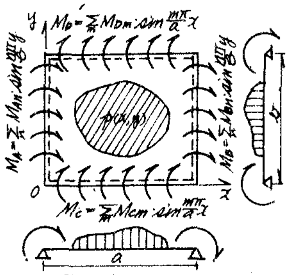
$$\left.\begin{aligned}
\theta_{An}=&\frac{M_{An}}{D\cdot\beta_n}\cdot c(\gamma_n)+\frac{M_{Bn}}{D\cdot\beta_n}\cdot d(\gamma_n)+\frac{1}{D\cdot a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\Pi(m,n,s)\cdot D_{ms}\cdot E(\alpha_m,\beta_s)\{M_{As}+(-1)^m\cdot M_{Bs}\}\\
&-\beta_n\cdot g(\gamma_n)\cdot\delta_{An}+\beta_n\cdot h(\gamma_n)\cdot\delta_{Bn}+\frac{1}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(1-\nu)^2\cdot\alpha_m^2\cdot\beta_s^2\cdot\Pi(m,n,s)\cdot D_{ms}\{\delta_{As}-(-1)^m\cdot\delta_{Bs}\}\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cdot f_{mn}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\Pi(m,n,s)\cdot\beta_s\cdot E(\alpha_m,\beta_s)\cdot f_{ms}\\
\theta_{Bn}=&\frac{M_{An}}{D\cdot\beta_n}\cdot d(\gamma_n)+\frac{M_{Bn}}{D\cdot\beta_n}\cdot c(\gamma_n)+\frac{1}{D\cdot a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^m\Pi(m,n,s)\cdot D_{ms}\cdot E(\alpha_m,\beta_s)\{M_{As}+(-1)^m\cdot M_{Bs}\}\\
&-\beta_n\cdot h(\gamma_n)\cdot\delta_{An}+\beta_n\cdot g(\gamma_n)\cdot\delta_{Bn}+\frac{1}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^m(1-\nu)^2\cdot\alpha_m^2\cdot\beta_s^2\cdot\Pi(m,n,s)\cdot D_{ms}\{\delta_{As}-(-1)^m\cdot\delta_{Bs}\}\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\alpha_m\cdot f_{mn}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^m\cdot\Pi(m,n,s)\cdot\beta_s\cdot E(\alpha_m,\beta_s)\cdot f_{ms}
\end{aligned}\right\}\text{--(4)}$$

ここに，$c(\gamma_n)=\frac{-\gamma_n+\sinh\gamma_n\cdot\cosh\gamma_n}{2\cdot\sinh^2\gamma_n}$，　$d(\gamma_n)=\frac{-\gamma_n\cdot\cosh\gamma_n+\sinh\gamma_n}{2\cdot\sinh^2\gamma_n}$，　$E(\alpha_m,\beta_s)=(2-\nu)\alpha_m^2+\beta_s^2$，

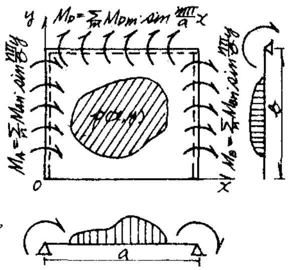
$g(\gamma_n)=\frac{1}{2\sinh^2\gamma_n}\left\{(1+\nu)\cdot\cosh\gamma_n+\frac{(1-\nu)\gamma_n}{\sinh\gamma_n}\right\}$，$h(\gamma_n)=\frac{1}{2\sinh\gamma_n}\left\{(1+\nu)+\frac{(1-\nu)\gamma_n\cosh\gamma_n}{\sinh\gamma_n}\right\}$，$D_{ms}=\frac{2\alpha_m\cdot\beta_n}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}$，$\alpha_m=\frac{m\pi}{a}$，$\beta_n=\frac{n\pi}{b}$，

$\Pi(m,n,s)=R_n(\alpha_m)\cdot\frac{2(-1)^n}{(1-\nu)b\alpha_m}\cdot D_{ms}\cdot E(\beta_s,\alpha_m)\cdot\left[\{(-1)^n+(-1)^s\}\cosh\lambda_m-(-1)^{n+s}-1\right]$，　$\lambda_m=\frac{m\pi b}{a}$，　$\gamma_n=\frac{n\pi a}{b}$，

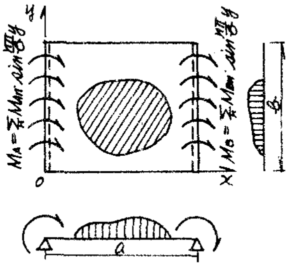
$R_n(\alpha_m)=\frac{\{(-1)^n(1-\nu)\cdot\lambda_m-(3+\nu)\cdot\sinh\lambda_m\}}{\alpha_m^2\{(1-\nu)^2\lambda_m^2-(3+\nu)^2\cdot\sinh^2\lambda_m\}}$，　$f_{mn}=\frac{1}{D(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}\int_0^a\int_0^b p(x,y)\cdot\sin\alpha_m x\cdot\sin\beta_n y$，



図－2.　Type 1 (a～c)



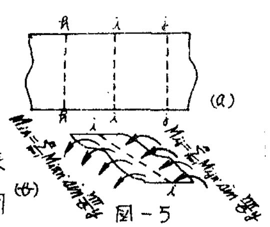
図－3.　Type 2 (d, e)



図－4　Type 3. (f)

3．連続板の解法　図-5(b)に示すごとく，連続板の支持線 i-i を取り出し，節線モーメントの釣合条件およびたわみ角の連続条件より，次の2式をうる．(文献(3)参照)．

すなわち，$M_{ikn}+M_{ijn}=0$，　$\theta_{ikn}=\theta_{ijn}$　……(5)　連続板上の各中間支持線において式(5)が成立し，その2式に相対する2辺の種々の境界条件に対応するたわみ角－端モーメント関係式を代入し，かつ連続板の連続方向の両端辺における支持条件式を加え，それらを連立に解けば所要の一方向連続板の解がえられる．



図－5

4．結語　相対する2辺が単純支持の矩形板(図-1(c)参照)以外は，たわみ角－端モーメント関係式が式(4)の式形からもわかるごとく，一般に未知数の単独項と級数和の項で示されるので，連続板の解法は試算による収斂計算となるが，電算を利用すれば大した手間とはならず，たとえば一径間に等分布荷重満載の一対辺が自由な一方向三径間連続板を，未知数 M_{Bn} の収斂誤差が 10^{-4} となるまでOKITAC-5091で演算した結果では約19分を要し，n は35回で完了した．

参考文献　(1) 成岡昌夫：撓角撓度法による一方向連続板の解法．土木学会論文集第4号．昭和24年6月．
(2) 岡之北海：弾性ばりに支持される連続板の解法並びに弾性梁のねじりモーメントが連続板におよぼす影響について．土木学会論文集才19号，昭和29年4月．　北海道土木試験所報告才15号．昭和31年7月．
(3) 山崎・樽本・橋田：たわみ角－端モーメント関係式による一方向連続板の解法．　昭和40年度土木学会西部支部研究発表会論文集
(4) 山崎・樽本・松本：たわみ角－端モーメント関係式による一方向連続斜形板の解法．昭和40年度土木学会西部支部研究発表会論文集