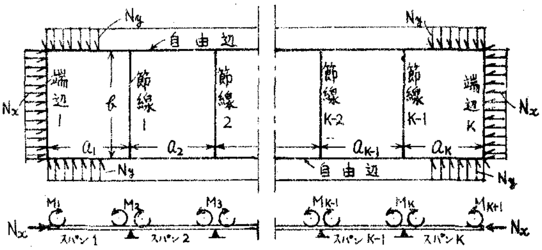
I－11　　一対辺自由なる一方向連続矩形板の安定

九州大学工学部　正員　山崎徳也
〃　〃　正員　○彦坂 熙

緒言　中立面内に周辺直圧力を受ける一方向連続板の安定を論じたものとしては、一対辺が単純支持された場合の座屈を階差方程式により取扱った倉田氏の論文[1]があるが、本論文はいわゆる座屈3連モーメントの式に相当する関係式を用いて図-1のごとく一対辺が自由で任意の端辺支持条件を持つ多径間連続板の座屈荷重計算法を述べたものである。

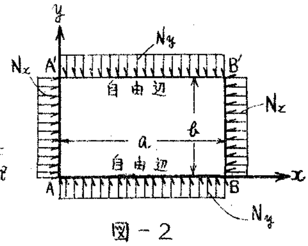


図－1

1. たわみ角－端モーメント関係式の誘導

図-2のごとく $y=0,\ b$ なる2辺が自由な矩形板が中立面内の等分布圧縮力 N_x, N_y を受ける場合の微分方程式は板剛度をDとして次式で表わされる。

$$\nabla^4 w + \frac{N_x}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{N_y}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$



図－2

式(1)よりたわみ w は8個の積分定数 $C_{n1}\sim C_{n4}$, $D_{m1}\sim D_{m4}$ を用いて次のごとく求められる[2]。すなわち

$$w=\sum_n\left(C_{n1}\cosh\pi\lambda_1\xi + C_{n2}\sinh\pi\lambda_1\xi + C_{n3}\cosh\pi\lambda_2\xi + C_{n4}\sinh\pi\lambda_2\xi\right)\sin n\pi\eta$$
$$+\sum_m\left(D_{m1}\cosh\pi\mu_1\eta + D_{m2}\sinh\pi\mu_1\eta + D_{m3}\cosh\pi\mu_2\eta + D_{m4}\sinh\pi\mu_2\eta\right)\sin m\pi\xi \qquad (2)$$

ここに
$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\}=\frac{a}{b}\sqrt{\left\{n^2-\frac{R}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}\pm\sqrt{\left\{n^2-\frac{R}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}^2-(n^2-Q)n^2}},\quad \left.\begin{matrix}\mu_1\\ \mu_2\end{matrix}\right\}=\frac{b}{a}\sqrt{\left\{m^2-\frac{Q}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right\}\pm\sqrt{\left\{m^2-\frac{Q}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right\}^2-(m^2-R)m^2}}$$

$$\xi = x/a,\quad \eta = y/b,\quad R = N_x a^2/D\pi^2,\quad Q = N_y b^2/D\pi^2$$

いま $x=0,\ a$ における境界条件を
$$(w)_{x=0}=\sum_n\delta_{An}\sin n\pi\eta,\qquad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0}=\sum_n M_{An}\sin n\pi\eta$$
$$(w)_{x=a}=\sum_n\delta_{Bn}\sin n\pi\eta,\qquad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a}=\sum_n M_{Bn}\sin n\pi\eta$$
で表わし、これら条件式に式(2)を代入すれば積分定数 $C_{n1}\sim C_{n4}$ が次式でえられる。

$$C_{n1}=-\frac{1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\frac{M_{An}}{D}-\frac{\lambda_2^2-\nu n^2a^2/b^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\delta_{An},\quad C_{n2}=\frac{1}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\sinh\pi\lambda_1}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\left(\frac{M_{An}}{D}\cosh\pi\lambda_1-\frac{M_{Bn}}{D}\right)+\frac{\lambda_2^2-\nu n^2a^2/b^2}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\sinh\pi\lambda_1}\left(\delta_{An}\cosh\pi\lambda_1-\delta_{Bn}\right)$$
$$C_{n3}=\frac{1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\frac{M_{An}}{D}+\frac{\lambda_2^2-\nu n^2a^2/b^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\delta_{An},\quad C_{n4}=-\frac{1}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\sinh\pi\lambda_2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\left(\frac{M_{An}}{D}\cosh\pi\lambda_2-\frac{M_{Bn}}{D}\right)-\frac{\lambda_1^2-\nu n^2a^2/b^2}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\sinh\pi\lambda_2}\left(\delta_{An}\cosh\pi\lambda_2-\delta_{Bn}\right) \qquad (3)$$

また $y=0,\ b$ に関する境界条件として $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\dfrac{N_y}{D}\dfrac{\partial w}{\partial y}=0$ がそれぞれ成立し、これらに式(2)を代入すれば残りの積分定数 $D_{m1}\sim D_{m4}$ が次のごとく定まる。

$$D_{m1}=\frac{2}{\pi}(\mu_2^2-\nu m^2b^2/a^2)\sum_n\left[\left\{\mathbb{U}\sinh\pi\mu_1(\cosh\pi\mu_2-(-1)^n)-\mathbb{V}\sinh\pi\mu_2(\cosh\pi\mu_1-(-1)^n)\right\}\mathbb{W}\right]$$
$$D_{m2}=-\frac{2}{\pi}(\mu_2^2-\nu m^2b^2/a^2)\sum_n\left[\left\{\mathbb{U}(\cosh\pi\mu_1+(-1)^n)(\cosh\pi\mu_2-(-1)^n)-\mathbb{V}\sinh\pi\mu_1\sinh\pi\mu_2\right\}\mathbb{W}\right]$$
$$D_{m3}=-\frac{2}{\pi}(\mu_1^2-\nu m^2b^2/a^2)\sum_n\left[\left\{\mathbb{U}\sinh\pi\mu_1(\cosh\pi\mu_2-(-1)^n)-\mathbb{V}\sinh\pi\mu_2(\cosh\pi\mu_1-(-1)^n)\right\}\mathbb{W}\right] \qquad (4)$$
$$D_{m4}=\frac{2}{\pi}(\mu_1^2-\nu m^2b^2/a^2)\sum_n\left[\left\{\mathbb{U}\sinh\pi\mu_1\sinh\pi\mu_2-\mathbb{V}(\cosh\pi\mu_1-(-1)^n)(\cosh\pi\mu_2+(-1)^n)\right\}\mathbb{W}\right]$$

ここに
$$\mathbb{U}=\frac{mn}{(\lambda_1^2+m^2)(\lambda_2^2+m^2)}\times\frac{\mu_2(\mu_1^2-\nu m^2b^2/a^2)^2}{2(\mu_1^2-\nu m^2b^2/a^2)^2(\mu_2^2-\nu m^2b^2/a^2)^2\mu_1\mu_2(\cosh\pi\mu_1\cosh\pi\mu_2-1)-\left\{(\mu_1^2-\nu m^2b^2/a^2)^4\mu_2^2+(\mu_2^2-\nu m^2b^2/a^2)^4\mu_1^2\right\}\sinh\pi\mu_1\sinh\pi\mu_2}$$
$$\mathbb{V}=\frac{mn}{(\lambda_1^2+m^2)(\lambda_2^2+m^2)}\times\frac{\mu_1(\mu_2^2-\nu m^2b^2/a^2)^2}{2(\mu_1^2-\nu m^2b^2/a^2)^2(\mu_2^2-\nu m^2b^2/a^2)^2\mu_1\mu_2(\cosh\pi\mu_1\cosh\pi\mu_2-1)-\left\{(\mu_1^2-\nu m^2b^2/a^2)^4\mu_2^2+(\mu_2^2-\nu m^2b^2/a^2)^4\mu_1^2\right\}\sinh\pi\mu_1\sinh\pi\mu_2}$$
$$\mathbb{W}=\left\{n^2-Q+(2-\nu)m^2b^2/a^2\right\}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\left(\frac{M_{An}}{D}-(-1)^m\frac{M_{Bn}}{D}\right)+\left\{(m^2-R)(n^2-Q)-\nu(2-\nu)m^2n^2\right\}\left(\delta_{An}-(-1)^m\delta_{Bn}\right)$$

式(3)(4)を式(2)に代入し $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}=\sum_n\theta_{An}\sin n\pi\eta$, $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a}=\sum_n\theta_{Bn}\sin n\pi\eta$ とおけば材端におけるたわみ角と曲げモーメントの関係式が次のごとく導かれる。

$$\left.\begin{array}{l}\theta_{An(n=1,3,5\cdots)}\\ \theta_{An(n=2,4,6\cdots)}\end{array}\right\}=A_{nn}\frac{a}{\pi}\frac{M_{An}}{D}+B_{nn}\frac{a}{\pi}\frac{M_{Bn}}{D}+C_{nn}\pi\frac{\delta_{An}}{a}+D_{nn}\pi\frac{\delta_{Bn}}{a}+\sum_{\substack{n'=1,3,5\cdots\\ n'=2,4,6\cdots}}\left(E_{nn'}\frac{a}{\pi}\frac{M_{An'}}{D}+F_{nn'}\frac{a}{\pi}\frac{M_{Bn'}}{D}+G_{nn'}\pi\frac{\delta_{An'}}{a}+H_{nn'}\pi\frac{\delta_{Bn'}}{a}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta_{Bn(n=1,3,5\cdots)}\\ \theta_{Bn(n=2,4,6\cdots)}\end{array}\right\}=-B_{nn}\frac{a}{\pi}\frac{M_{An}}{D}-A_{nn}\frac{a}{\pi}\frac{M_{Bn}}{D}-D_{nn}\pi\frac{\delta_{An}}{a}-C_{nn}\pi\frac{\delta_{Bn}}{a}-\sum_{\substack{n'=1,3,5\cdots\\ n'=2,4,6\cdots}}\left(F_{nn'}\frac{a}{\pi}\frac{M_{An'}}{D}+E_{nn'}\frac{a}{\pi}\frac{M_{Bn'}}{D}+H_{nn'}\pi\frac{\delta_{An'}}{a}+G_{nn'}\pi\frac{\delta_{Bn'}}{a}\right) \qquad (5)$$

ここに $A_{nn}=\frac{1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}(\lambda_1\coth\pi\lambda_1-\lambda_2\coth\pi\lambda_2)$,　$B_{nn}=\frac{1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}(\lambda_2\,\mathrm{cosech}\,\pi\lambda_2-\lambda_1\,\mathrm{cosech}\,\pi\lambda_1)$,

$C_{nn}=\frac{1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\{\lambda_1(\lambda_2^2-\nu n^2a^2/b^2)\coth\pi\lambda_1-\lambda_2(\lambda_1^2-\nu n^2a^2/b^2)\coth\pi\lambda_2\}$,　$D_{nn}=\frac{1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\{\lambda_2(\lambda_1^2-\nu n^2a^2/b^2)\,\mathrm{cosech}\,\pi\lambda_2-\lambda_1(\lambda_2^2-\nu n^2a^2/b^2)\,\mathrm{cosech}\,\pi\lambda_1\}$

$$E_{nn'}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_m\Big[\big[\{V\sinh\pi\mu_2(\cosh\pi\mu_1-(-1)^n)-U\sinh\pi\mu_1(\cosh\pi\mu_1-(-1)^n)\}\{n^2-Q+(2-\nu)m^2b^2/a^2\}\big]_{n=n'}\times\left[\frac{2mn\{n^2-Q+(2-\nu)m^2b^2/a^2\}}{(\mu_1^2+n^2)(\mu_2^2+n^2)}\right]\Big]$$

$$F_{nn'}=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_m\Big[(-1)^m\big[\{V\sinh\pi\mu_2(\cosh\pi\mu_1-(-1)^n)-U\sinh\pi\mu_1(\cosh\pi\mu_1-(-1)^n)\}\{n^2-Q+(2-\nu)m^2b^2/a^2\}\big]_{n=n'}\times\left[\quad〃\quad\right]\Big]$$

$$G_{nn'}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_m\Big[\big[\{V\sinh\pi\mu_2(\cosh\pi\mu_1-(-1)^n)-U\sinh\pi\mu_1(\cosh\pi\mu_1-(-1)^n)\}\{(n^2-Q)(m^2-R)-\nu(2-\nu)m^2n^2\}\big]_{n=n'}\times\left[\quad〃\quad\right]\Big]$$

$$H_{nn'}=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_m\Big[(-1)^m\big[\{V\sinh\pi\mu_2(\cosh\pi\mu_1-(-1)^n)-U\sinh\pi\mu_1(\cosh\pi\mu_1-(-1)^n)\}\{(n^2-Q)(m^2-R)-\nu(2-\nu)m^2n^2\}\big]_{n=n'}\times\left[\quad〃\quad\right]\Big]$$

2. 座屈条件式

図-2のごとき座標を図-1の各スパンごとに設け、$x_i=a_i$ なる節線が $x_{i+1}=0$ と一致するごとく定めれば、各スパンごとに材端のたわみ角 $\theta_{i.An}$, $\theta_{i.Bn}$ と端モーメント $M_{i.An}$, $M_{i.Bn}$ が定義される。スパン i とスパン $i+1$ の節線 i では $M_{i.Bn}=M_{i+1.An}=M_{i+1.n}$, $\delta_{i.Bn}=\delta_{i+1.An}=\delta_{i+1.n}$ となり、これを考慮してたわみ角の連続条件式 $\theta_{i.Bn}=\theta_{i+1.An}$ を立てればいわゆる3連モーメント式に相当する次の関係式が $i=1,2,3\cdots\cdots K-1$（Kは連続板の径間数）に対して成立する。等断面、等スパンの簡単な場合を例にとれば すなわち

$$B_{i.nn}\frac{a}{\pi}\frac{M_{i.n}}{D}+(A_{i.nn}+A_{i+1.nn})\frac{a}{\pi}\frac{M_{i+1.n}}{D}+B_{i+1.nn}\frac{a}{\pi}\frac{M_{i+2.n}}{D}+\sum_{\substack{n'=1,3,5\cdots\\ n'=2,4,6\cdots}}\left[F_{i.nn'}\frac{a}{\pi}\frac{M_{i.n'}}{D}+(E_{i.nn'}+E_{i+1.nn'})\frac{a}{\pi}\frac{M_{i+1.n'}}{D}+F_{i+1.nn'}\frac{a}{\pi}\frac{M_{i+2.n'}}{D}\right]$$
$$+D_{i.nn}\pi\frac{\delta_{i.n}}{a}+(C_{i.nn}+C_{i+1.nn})\pi\frac{\delta_{i+1.n}}{a}+D_{i+1.nn}\pi\frac{\delta_{i+2.n}}{a}+\sum_{\substack{n'=1,3,5\cdots\\ n'=2,4,6\cdots}}\left[H_{i.nn'}\pi\frac{\delta_{i.n'}}{a}+(G_{i.nn'}+G_{i+1.nn'})\pi\frac{\delta_{i+1.n'}}{a}+H_{i+1.nn'}\pi\frac{\delta_{i+2.n'}}{a}\right]=0 \qquad (6)$$

式(6)中の δ は端辺1またはKが自由なる場合のみそれぞれ δ_{1n}, $\delta_{K+1.n}$ となり途中の δ はすべて消滅する。式(6)に加えて両端辺条件式として例えば端辺Kが単純支持の場合は $M_{K+1.n}=\delta_{K+1.n}=0$, 固定の場合は $\delta_{K+1.n}=\theta_{K.Bn}=0$, 自由の場合は $M_{K+1.n}=0$, $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+\frac{N_x}{D}\frac{\partial w}{\partial x}=0$ などがそれぞれ成立し、端辺1においても全く同様の式が成り立つ。よって式(6)および両端辺条件式がすべては0でない解 $M_{i.n}$, δ_{1n}, $\delta_{K+1.n}$ を持つためにはこれら諸式の M_n および δ_n の係数の行列式が0となるいわゆる座屈条件式が成立し、これより所要の座屈荷重が決定されることとなる。一例として式(6)中の級数を偶数項 $n'=2N$ までとった場合の両端辺固定Kスパン連続板の座屈条件式を次記する。行列式中 (a_i), (c_i) は 式(6)中の奇数項級数に、$(b_i)(d_i)$ は偶数項級数に依るもので (a_i),(c_i) の内容のみ右に示した。

$$\begin{vmatrix}
(a_1) & (c_1) & & & & & & & & \\
(c_1) & (a_2) & (c_2) & & & & & 0 & & \\
 & (c_2) & (a_3) & (c_3) & & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & (c_{K-1}) & (a_K) & (c_K) & & & & & \\
 & & & (c_K) & (a_{K+1}) & & & & & \\
 & & & & & (b_1) & (d_1) & & & \\
 & & & & & (d_1) & (b_2) & (d_2) & & \\
 & & 0 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & (d_{K-1}) & (b_K) & (d_K) & \\
 & & & & & & & (d_K) & (b_{K+1}) &
\end{vmatrix}=0 \cdots\cdots (7)$$

$$(a_i)=\begin{pmatrix}
(A_{i-1.11}+A_{i.11}+E_{i-1.11}+E_{i.11}) & (E_{i-1.13}+E_{i.13}) & \cdots & (E_{i-1.1.2N-1}+E_{i.1.2N-1})\\
(E_{i-1.31}+E_{i.31}) & (A_{i-1.33}+A_{i.33}+E_{i-1.33}+E_{i.33}) & \cdots & (E_{i-1.3.2N-1}+E_{i.3.2N-1})\\
\vdots & & \ddots & \vdots\\
(E_{i-1.2N-1.1}+E_{i.2N-1.1}) & \cdots & & (A_{i-1.2N-1.2N-1}+A_{i.2N-1.2N-1}+E_{i-1.2N-1.2N-1}+E_{i.2N-1.2N-1})
\end{pmatrix}$$

$$(c_i)=\begin{pmatrix}
(B_{i.11}+F_{i.11}) & F_{i.13} & \cdots & F_{i.1.2N-1}\\
F_{i.31} & (B_{i.33}+F_{i.33}) & \cdots & F_{i.3.2N-1}\\
\vdots & & \ddots & \vdots\\
F_{i.2N-1.1} & \cdots & & (B_{i.2N-1.2N-1}+F_{i.2N-1.2N-1})
\end{pmatrix}$$

結語

一対辺自由なる一方向連続板の座屈荷重算定は式(7)のごとき多元行列式の計算に帰せられるが電算を用いればさほどの手間ではない。なお本論文の手法は他種の一方向連続板および二方向連続板の安定問題にも拡張応用が可能であることを付言する。

（参考文献）(1) 倉田宗章：“多径間連続板の座屈荷重計算法” 土木学会論文集 第6号　昭和26年8月

(2) 山崎、樗木、横田：“たわみ角－端モーメント関係式による二方向連続板の解法” 昭和40年度土木学会西部支部研究発表会論文集