I−7

NET WORKの計算法

法政大学　正員　大地羊三

1. まえがき

骨組構造物の解式を変形法でまとめる場合、NET WORKの理論が有効である事についてはすでに報告ずみである。しかし今までの報告では形状行列を中心に説明がなされたため、NET WORK理論の本質が理解しにくいものであった。この理論は水路網、電気の配線網、工程管理(PERT)、箱桁のせん断流等にも利用されるので、最も理解し易い水路網を例に取ってその本質を説明する。

2. 部材方程式

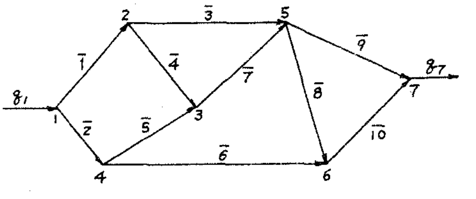

図1　水路網の例

図1に示す水路網を例にとる。個々のパイプを部材とよび、それが合流又は分岐する点を節点とよぶ事にする。部材には、$\bar{1},\bar{2}\cdots\bar{j}\cdots\bar{n}$, 節点には $1,2\cdots i\cdots m$ の如く一連番号をつける。そのつけ方は任意である。又各部材は a 端 b 端の区別をし水が a 端から b 端に流れるとき流量が正であるとする(図では b 端に→をつけて a 端と区別してある)。さて任意の部材 j を取り出すとそこを流れる流量 $Q_{\bar{j}}$ と両端(a 端, b 端)の水圧 P_a, P_b の間には次の関係式が成立つ。

$$P_{a\bar{j}} - P_{b\bar{j}} = R_{\bar{j}} \cdot Q_{\bar{j}} \tag{1}$$

但し $R_{\bar{j}}$ はパイプの摩擦抵抗係数である。すべてのパイプについて上式を作り行列の形で表わすと

$$\begin{bmatrix} P_{a\bar{1}} \\ \vdots \\ P_{a\bar{10}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{b\bar{1}} \\ \vdots \\ P_{b\bar{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\bar{1}} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{\bar{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\bar{1}} \\ \vdots \\ Q_{\bar{10}} \end{bmatrix} \quad \text{又は簡単に} \quad \mathbb{P}_a - \mathbb{P}_b = \hat{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{Q} \tag{2}$$

が得られる。

3. 節点方程式

次に各節点ではそこに流入する水量と流出する水量の代数和は 0 でなければならない。例えば

$$\begin{aligned} &\text{節点}1: \quad +Q_{\bar{1}} + Q_{\bar{2}} - q_1 = 0 \\ &\text{節点}3: \quad -Q_{\bar{4}} - Q_{\bar{5}} + Q_{\bar{7}} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

である。但し図1の q_1, q_7 等は外部より流入又は流出する水量である。上式は形式的に

$$\sum_{i(j)} Q_{\bar{j}} = -q_i \quad (i = 1 \cdots\cdots 7) \tag{4}$$

と書く事が出来る。但し q_i の符号は流出するものを負とする。

4. 形 状 行 列

式 (4) を行列の形で表現するために、次に述べる形状行列を定義する。実際に式 (4) を作り $Q_{\bar{j}}$ にかかる係数を取り出して行列を作ると図2が得られる。これを+1のみを持つ、α行列と-1のみを持つβ行列（原素の符号は+に変える）に分けると、$Q_{\bar{j}}$の係数行列は $\alpha-\beta$ で表わされる。これを式 (4) に用いると、次式が得られる。

$$(\alpha-\beta)\mathbb{Q}=\mathbb{q} \tag{5}$$

	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$
1	1	1								
2	-1		1	1						
3			-1	-1		1				
4		-1		1	1					
5			-1				-1	1	1	
6						-1		-1		1
7									-1	-1

図2　$Q_{\bar{j}}$の係数行列

但し

$$\alpha=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad \beta=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Q}=\begin{bmatrix}Q_{\bar{1}}\\ \vdots\\ Q_{\overline{10}}\end{bmatrix}\qquad \mathbb{q}=\begin{bmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_7\end{bmatrix}$$

α，βは次の如くして作るとよい。例えば節点4に集まる部材の内、節点4側をa端とする部材は、$\bar{5}$，$\bar{6}$の二つである。そこでα行列の4行の5番目と6番目を1とする。又節点4側をb端とする部材は$\bar{2}$のみである。そこでβ行列の4行の2番目を1とする。一般に節点iに着目し、そこに集る部材$\bar{j}$が節点i側をa端とするときはαの$i\bar{j}$原素を1とし、b端となるときはβの$i\bar{j}$原素を1とすればよい。

5. 適 合 条 件 式

前節で述べた形状行列は次の如く節点の水圧P_iと部材端の水圧$P_{a\bar{j}}$，$P_{b\bar{j}}$の関係を求める場合にも使う事が出来る。先ず各節点の水圧をP_1……P_7としこれをたてに並べたベクトルを$\mathbb{P}$とする。次にα，βの行と列を入れかえた転置行列α^T，β^Tを作り、$\alpha^T\mathbb{P}$，$\beta^T\mathbb{P}$を計算すると夫々（$P_1\,P_1\,P_2\,P_2\,P_4\,P_4\,P_3\,P_5\,P_5\,P_6$），（$P_2\,P_4\,P_5\,P_3\,P_3\,P_6\,P_5\,P_6\,P_7\,P_7$）をたてに並べたベクトルが得られる。節点の水圧とそれにつながる部材端の水圧は等しいので、この計算結果を次の如く書く事もできる。

$$\alpha^T\mathbb{P}=\mathbb{P}_a\quad,\quad \alpha^T\mathbb{P}=\mathbb{P}_b \tag{6}$$

6. 解 式

式 (2),(5),(6) より 次の二式が得られる。

$$\mathbb{Q}=\hat{\mathbb{R}}^{-1}(\alpha-\beta)\mathbb{P}\cdots\cdots(7)\qquad (\alpha-\beta)\hat{\mathbb{R}}^{-1}(\alpha-\beta)\mathbb{P}=\mathbb{q}\cdots\cdots(8)$$

式(8)を解く事により節点水圧$\mathbb{P}$が求まり、これを(7)に代入する事によって各部材の流量$\mathbb{Q}$が求められる。但し実際の水路網では摩擦抵抗係数$\hat{\mathbb{R}}$が流量$\mathbb{Q}$の関数になっているので式(8)より直接解は求まらない。繰返計算が必要である。又式(8)の左辺の係数行列は逆行列を持たない行列となっている。そこで任意の一点の水圧を固定し（例えば7点を大気圧に等しく取る）それからの相対圧を求めるようにしなければならない。固定した点に対応する行と列（今の場合は7行と7列）を消す事によってこの困難は克服出来る。