I—6　行列による梁および板の解析

東大生研　正員　久保慶三郎
〃　〃　○吉田　裕

1.　はじめに　　最近，行列によって構造物を解析することが再認識されている。行列による方法は，骨組構造のように個々の構造要素が明確に分離できるような問題に対して特に有利である。板のように連続した構造の場合には，これを多数の基準要素に分解したり，等価骨組構造に置換したり，微分方程式を階差式に展開したりして解析する。階差式による方法は，これまで広く適用され実績をおさめているが，集中荷重が作用する場合のように特異点や反曲線の多い問題には，あまりよい精度が得られないということが通説になっている。しかし，荷重を集中荷重に限定すれば，行列によって梁や板の問題を非常に精度よく解析することができる。こゝでは，この方法を説明し，これまで「構造力学」の中で別個の問題として取扱われてきた梁と板の問題を同じ次元で解釈することができることを示す。

2.　集中荷重を受ける梁　　点支承を持ち集中荷重を受ける梁は，支点反力を含めて多数の集中荷重が作用して釣合を保っている。このような梁の曲げモーメント分布は各荷重作用点の曲げモーメントの値を直線で結んだものとなる。また，荷重系Pと曲げモーメント系Mとの間には正しく次の関係が成立する。

$$P_i = -\frac{1}{\lambda_{i-1,i}}M_{i-1} + \left(\frac{1}{\lambda_{i-1,i}} + \frac{1}{\lambda_{i,i+1}}\right)M_i - \frac{1}{\lambda_{i,i+1}}M_{i+1} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

微小変位の場合には，たわみδを求めることは$\frac{M}{EI}$なる弾性荷重を受ける梁の曲げモーメントを求めることに等値であるから各荷重作用点間（例えばiと$i+1$点の間）で曲げ剛性が一定であるものとすれば，図-1(d)のような弾性荷重系Wを考えて，曲げモーメント系Mとたわみ系Δとの間には正しく次の関係が成立する。

$$\frac{\lambda_{i-1,i}}{6EI_{i-1,i}}M_{i-1} + \left(\frac{\lambda_{i-1,i}}{3EI_{i-1,i}} + \frac{\lambda_{i,i+1}}{3EI_{i,i+1}}\right)M_i + \frac{\lambda_{i,i+1}}{6EI_{i,i+1}}M_{i+1}$$

$$= -\frac{1}{\lambda_{i-1,i}}\Delta_{i-1} + \left(\frac{1}{\lambda_{i-1,i}} + \frac{1}{\lambda_{i,i+1}}\right)\Delta_i - \frac{1}{\lambda_{i,i+1}}\Delta_{i+1} \quad \cdots (2)$$

式(1)および式(2)によって点支承を持ち集中荷重を受ける梁を正しく解析することができる。

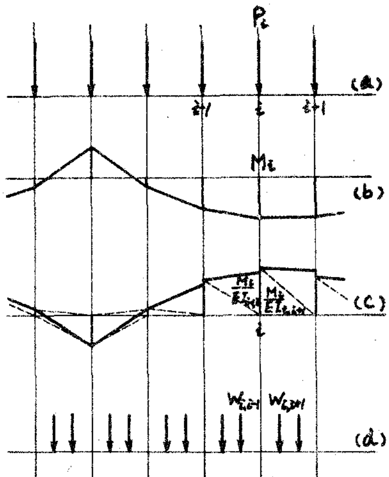

図-1

$$W_{i,i-1} = \frac{M_i}{2EI_{i-1,i}} \times \lambda_{i-1,i}$$

$$W_{i,i+1} = \frac{M_i}{2EI_{i,i+1}} \times \lambda_{i,i+1}$$

3.　階差式に展開して解くことについて　　説明の便宜のために，曲げ剛性一定で等間隔に荷重が作用する場合について考える。連続した弾性荷重系図-2(a)に於ける各斜線の部分の荷重を集中荷重に置換した系が(b)である。この(b)の荷重系Wと曲げモーメント系（即ちたわみ系）Δとの間には式(3)の関係が成立する。

$$W_i = \frac{\lambda}{EI}M_i = \frac{1}{\lambda}\left(-\Delta_{i-1} + 2\Delta_i - \Delta_{i+1}\right) \quad \cdots\cdots (3)$$

微分方程式を普通の階差式に展開して $\kappa_i\lambda = P_i$ と置いて梁の問題を解くことは，この式(1)と式(3)によって解析することに相当する。今式(1)は正しい関係式であるから，この両式によって解くことによって生ずる誤差は図-2(a)の系を(b)の系に置換する際に生ずる。この(a)と(b)の系を比較してみれば明らかなように Δ_iを求める際に(b)の系では(a)の系における太線内の三角形の荷重による曲げモーメントを考慮していないことが分る。連続梁の支点の変位Δ_rが零であるという条件で問題を解くものとすれば，以上の理由から支点の曲げモーメントM_rには当然誤差が含まれ，したがって梁の支点間の曲げモーメントM_iにも誤差が含まれてくる。今，図-2(b)の系に於て支点での部分だけ弾性荷重を二つの集中荷重に分解して作用させた(c)の系を考えてみる。この(c)の系によればΔ_rを正しく評価することができる。よって，式(1)とこの(c)の系によって解析を行う場合には，曲げモーメント系Mは正解となる。

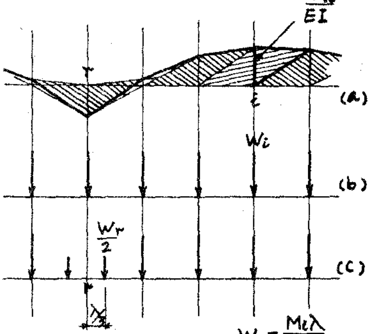

図-2

4. 集中荷重を受ける板　梁に対する解析法を板の問題に拡張することを試みる。周知のように，等方性板の基本式は，曲げモーメント和 $M=\frac{M_x+M_y}{1+\nu}$ に関して式(4)のように表わすことができ，またMはたわみwに対して式(5)のようになる。この両式と梁の基本式を対比して，式(1)および式(2)を板の問題に適用する。すなわち 板の点(i,j)に作用する集中荷重の大きさP_{ij}をP_{ij}^xとP_{ij}^yとの和と考える。図-3を参照して，M_{ij}を点(i,j)を中心として幅λ_x, λ_yの曲げモーメント和の値の平均値を表わすものと考えることによって，P_{ij}を次式で表わすことができる。

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -q \quad \text{----}(4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \quad \text{----}(5)$$

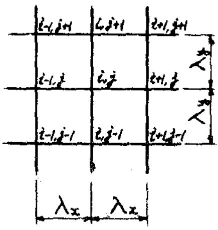

図-3

$$P_{ij} = \frac{-M_{i-1,j} + 2M_{i,j} - M_{i+1,j}}{\lambda_x} \times \lambda_y + \frac{-M_{i,j-1} + 2M_{i,j} - M_{i,j+1}}{\lambda_y} \times \lambda_x \quad \text{--------}(6)$$

次に，M_{ij}と同様にΔ_{ij}を点(i,j)を中心として幅λ_x, λ_yのたわみの平均値を表わすものと考えることによって，式(5)を梁の式(2)と対応させることができ，次式を得る。

$$\frac{\lambda_x\lambda_y}{D}\left\{\frac{2}{3}M_{ij} + \frac{1}{12}\left(M_{i-1,j}+M_{i+1,j}+M_{i,j-1}+M_{i,j+1}\right)\right\} = \frac{-\Delta_{i-1,j}+2\Delta_{i,j}-\Delta_{i+1,j}}{\lambda_x}\times\lambda_y + \frac{-\Delta_{i,j-1}+2\Delta_{i,j}-\Delta_{i,j+1}}{\lambda_y}\times\lambda_x \quad \text{----}(7)$$

5. 計算例　周辺単純支持正方形板(辺長 a)について計算を行った結果のうち，中央に集中荷重が作用したときの各点のたわみを，式(6)式(7)による解，級数で10項までとった解，および普通の階差式による解を比較して表示する。また，曲げモーメント和Mを求めΔを参考して，これをM_xとM_yに分解することにより，曲げモーメントに関しても精度のよい解を得ることができる。

.01159	.00918	.00486
.00918	.00761	.00412
.00486	.00412	.00228

級数解

.01174	.00925	.00487
.00925	.00752	.00406
.00487	.00406	.00223

式(6)式(7)による解

.01277	.00970	.00505
.00970	.00781	.00419
.00505	.00419	.00230

普通階差式による解

$\left(\times \frac{Pa^2}{D}\right)$