Ⅳ-115 空間曲線の曲率半径およびねじれ率半径の図式解法

防衛大学校　正員 畠山 正　○正員 池内正幸

1. まえがき

図学が工学に直結する基礎知識であることはいうまでもないが，同時に，むしろそれに先行して，図学は理論と実践との結合をその性格としてもっていることおよび空間表象を具体的に把握し，表現するのに最も適切な手段であることは周知の通りである。しかし，図学の現況はモンジュ画法から殆んど進展がみられていない。ここでは微分幾何学の概念を正投象にとり入れ，空間曲線を解析的表示によらず，正投象法によって描かれた図形の上で解く方法について研究した結果を述べる。

2. 空間曲線

空間曲線は曲線長 v を媒介変数として次式で示される。

$$x_i = x_i(v) \quad ; \; i=1,\ 2,\ 3. \tag{1}$$

直交座標 x_1, x_2, x_3 を正投象法によって図のように定めれば，曲線の平面図は $x_1=x_1(v)$, $x_2=x_2(v)$ を示し，立面図は $X_2=x_2(v)$, $x_3=x_3(v)$ を示す。

曲線上の点 $P(v)$ における接線は

$$(X_1-x_1)/\dot{x}_1=(X_2-x_2)/\dot{x}_2=(X_3-x_3)/\dot{x}_3 \tag{2}$$

接線の平面図は $(X_1-x_1)/\dot{x}_1=(X_2-x_2)/\dot{x}_2$，立面図は $(X_2-x_2)/\dot{x}_2=(X_3-x_3)/\dot{x}_3$ であり，これは曲線の平面図および立面図の接線となる。

点 P を通る法平面は

$$\dot{x}(X_1-x_1)+\dot{x}_2(X_2-x_2)+\dot{x}_3(X_3-x_3)=0 \tag{3}$$

図1に曲線の点 P における接線および法平面の投象を示す。

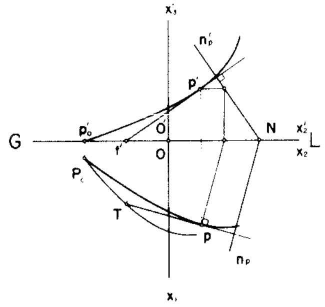

図 1

3. 接触平面

平面が曲線上の1点においてこれと少くとも2次の接触をするとき，この平面を接触平面という。接触平面は

$$\begin{vmatrix} X_1-x_1 & X_2-x_2 & X_3-x_3 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \end{vmatrix} =0 \tag{4}$$

空間曲線の接線の水平跡点は

$$X_1=(x_1\dot{x}_3-\dot{x}_1x_3)/\dot{x}_3, \quad X_2=(x_2\dot{x}_3-\dot{x}_2x_3)/\dot{x}_3 \tag{5}$$

点 P が曲線上を移動するとき接線の水平跡点の描く軌跡の接線は

$$(\xi_1-X_1)/\dot{X}_1=(\xi_2-X_2)/\dot{X}_2 \tag{6}$$

(5)を代入すれば

$$\begin{vmatrix} \xi_1-x_1 & \xi_2-x_2 & -x_3 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \end{vmatrix} =0 \tag{7}$$

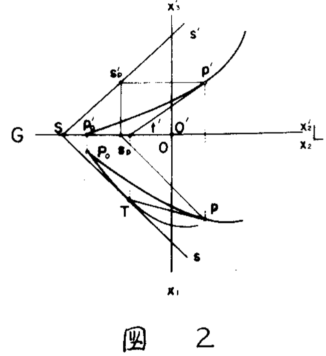

図 2

これは接触平面の水平跡線と一致する。したがって，接触平面の水平跡線は曲線の接線の水平跡点より求められる。直立跡線は水平跡平行線を用いて描かれる。図2は接触平面の跡線を示す。

点Pにおける接触平面上において，接線と直交する直線を主法線，点Pを通り接触平面と直交する直線を従法線という。接線・主法線および従法線は次の関係を満足する。ただし，α_i，l_i，λ_iはそれぞれの方向余弦である。

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 1 \qquad (8)$$

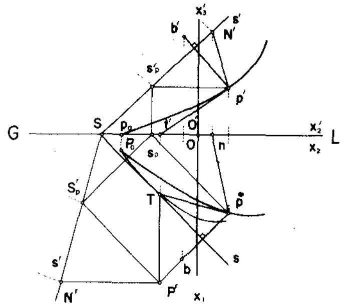

図　3

図3は点Pにおける接線、主法線および従法線を示す。

4. 曲率半径

曲線上の近接2点$P(v)$，$P_1(v+\Delta v)$を考え，2点における接線のなす角を$\Delta\theta$とする。Δvが限りなく0に接近するとき$\Delta\theta/\Delta v$の極限値を曲率，その逆数を曲率半径という。

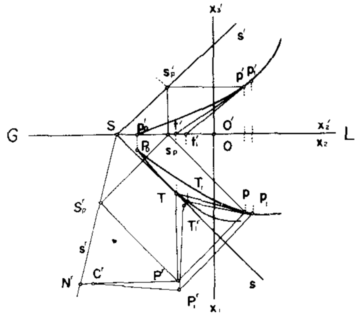

図　4

図4において点Pにおける接触平面をSとする。水平跡線sを軸として平面Sのラバットメントを行う。近接点P_1における接線は近似的にS上にあるとみなされるから，同様にsを軸としてそのラバットメントを求めると$P_1^rT_1^r$が得られる。Pにおける主法線P^rN^rと，P_1^rを通り$P_1^rT_1^r$と直交する直線$P_1^rC^r$との交点をC^rとすれば，C^rはPにおける曲率の中心Cのラバットメントとなる。曲率半径はP^rC^rにより示される。

5. ねじれ率半径

点$P(v)$における接触平面Sと，$P_1(v+\Delta v)$における接触平面S_1とのなす角を$\Delta\phi$とし，Δvが限りなく0に接近するとき$\Delta\phi/\Delta v$の極限値を点Pにおけるこの曲線のねじれ率といい，その逆数をねじれ率半径という。

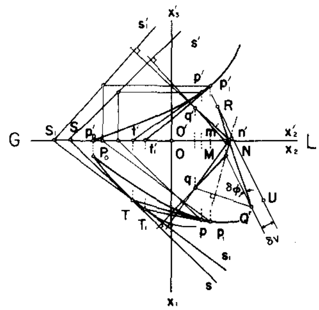

図　5

図5においてSおよびS_1はそれぞれPおよびP_1における接触平面である。任意の点QよりSおよびS_1に垂線を引きその水平跡点をMおよびNとする。MNを軸としてQを水平投象面上にラバットすれば2面角$\delta\phi$は$\angle MQ^rN$で示される。MQ^rとδvの距離をもつ平行線URを引くとき，URとQ^rNとの交点Rを求めれば，Q^rRがねじれ率半径を示す。

6. むすび

以上接触平面の跡線を用いて空間曲線の曲率半径およびねじれ率半径の図解法を述べた。この方法を用いれば空間曲線の性質を解析的表示によらずに求め得ると同時に，図形の計量的性質も表示することができる。