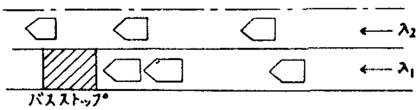
IV-90 路側のバスストップ後方に生ずる待ち行列車について

京都大学工学部　正員　工博　米谷栄二
京都大学工学部　正員　工修○明神　証
京都大学大学院　学生員　住田陸快

まえがき．大量輸送機関の1つとしてのバスのもつ比重が大きくなってきた。バス乗降客が増加する一方，都市の街路交通はしだいに混雑の度を増してきたため，これら都心部の路側のバスストップにおけるバスの着発が一般交通流におよぼす影響も無視できなくなった。バスが路側のバスストップに到着し客のために降車・乗車を行なう間，その車線はブロックされる。バスが停車している間この部分はいわばあい路となり一般交通流の遅滞を生ずることになる。ここでは，このあい路における交通遅滞を確率モデルをもちいて考察してみた。



モデルの設定．片方向2車線の道路を考え，バスはこの外側車線を走行してきて右の図に示すようなバスストップで停車し外側車線をブロックする。内側と外側の車線を走行している車は車線相互間ではまったく影響し合うことがなく，また同一車線上についても相互に独立であるとする。外側車線上を走行してきた車はバスストップに停車しているバスの後方で待ち行列をつくって待つことになるが，待っている間に内側車線上にある長さ以上の車頭間隔が生じた場合にかぎって内側車線に流入することができる。1度に流入することができるのは1台だけとし先着順とする。1台のバスの停車時間を一定とすればこの待ち合せ問題はつぎのように記述される。「ランダムに到着する車に対して断続的に一定時間だけ1つのサービス窓口を開いてサービスを行なうとき，このサービス窓口の前に生ずる車の待ち行列の状態を求めること。」ここでサービスとは，バスの後方に生じた車の待ち行列のうちの先頭の車が内側車線に流入する機会を探しつつ停車している状態である。したがってサービス窓口は，バスが停車している間つねに開かれている。バスが停車していなければこのような待ち行列を生じないので，ここではバスが停車している場合だけについて考える。また，サービスは待ち行列の先頭車がある長さ以上の車頭間隔を内側車線上に見出しそこに流入できる状態になった瞬間をもって終る。流入は瞬間的におこなわれるものとし，各車線上の車の平均到着率は不変であると仮定する。

解．バスがバスストップに停車した時刻を0としこの時刻からt時間だけ経過したとき，サービス中の先頭車を含めてバス後方にたまった車の行列台数をnとする。時刻tにn台並んでいる確率を$p_n(t)$とすれば

$$\left.\begin{aligned}
&p_n(t+\Delta t) = p_n(t)\left(1-\lambda_1\Delta t-\mu\Delta t\right) + p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + p_{n+1}(t)\mu\Delta t \qquad n \geq 1\\
&p_0(t+\Delta t) = p_0(t)\left(1-\lambda_1\Delta t\right) + p_1(t)\mu\Delta t\\
&\text{ただし}\quad 0\leq t\leq C\ ,\ C：\text{バスの停車時間},\\
&\qquad\lambda_1：\text{外側車線上車の平均到着率}\ ,\ \mu：\text{平均サービス率}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

実際に，サービス時間がどんな分布であるかはまだ明らかでないが，式(1)では一応指数分布を仮定し

ている。式(1)で、$p_n(t)$を左辺に移して両辺をΔtでわり$\Delta t \to 0$とすると

$$\left.\begin{aligned} p_n'(t) &= -(\lambda_1+\mu)p_n(t)+\lambda_1 p_{n-1}(t)+\mu p_{n+1}(t), \qquad n \geq 1 \\ p_0'(t) &= -\lambda_1 p_0(t)+\mu p_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ここで$p_n(t)$の母関数をつぎのように定義する。

$$P(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n \qquad |z| \leq 1$$

そうすると式(2)から

$$z\cdot\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}=(1-z)\left[(\mu-\lambda_1 z)P(z,t)-\mu p_0(t)\right] \tag{3}$$

初期条件として、時刻$t=0$において$n=0$であるから、$n \geq 1$のとき$p_n(0)=0$, $p_0(0)=1$。よって$P(z,0)=1$。式(3)の両辺で$P(z,t)$のtに関してラプラス変換をとれば

$$P^*(z,s)=\frac{z-\mu(1-z)P_0^*(s)}{sz-(1-z)(\mu-\lambda_1 z)}, \quad \text{ただし、} P^*(z,s)=\int_0^{\infty} e^{-st}P(z,t)\,dt \quad Re(s)>0 \tag{4}$$

さて、式(4)の右辺をzの多項式に展開したときのz^nの係数がすなわち$p_n(t)$のラプラス変換になっている。式(4)の右辺をzの多項式に展開してz^nの係数を求め、その係数の逆ラプラス変換を計算することによって$p_n(t)$はつぎのように与えられている。

$$p_n(t)=e^{-(\lambda_1+\mu)t}\left\{\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_1}}\right)^{-n} I_n(2\sqrt{\lambda_1\mu}\,t)+\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_1}}\right)^{-n+1} I_{n+1}(2\sqrt{\lambda_1\mu}\,t)+\left(1-\frac{\lambda_1}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{n}\sum_{k=n+2}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_1}}\right)^{k} I_k(2\sqrt{\lambda_1\mu}\,t)\right\} \tag{5}$$

ただし、 $I_k(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{k+2m}}{m!\,\Gamma(k+m+1)}$, $0 \leq t \leq C$

式(5)は、バスがバスストップに停車した後時刻tにおいてその後方にたまっている車の台数がnである確率を与える。つぎに内側車線について考えてみる。内側車線の平均到着率をλ_2とすれば、そこでT時間以上の車頭間隔がある確率は、$\int_T^{\infty}\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}dt=e^{-\lambda_2 T}$で与えられる。任意の時刻からはじめて、$x$時間後にはじめて$T$以上の車頭間隔が生じたとすると、$x$の密度関数$w(x)$は

$$w(x)=e^{-\lambda_2 T}\delta(x)+e^{-\lambda_2 T}\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_2 e^{-\lambda_2 x})^{n*}, \tag{6}$$

ここで、$(\lambda_2 e^{-\lambda_2 x})^{n*}$はその$n$回のconvolutionをとることを示す。$x$時間の間には最初に存在する車頭間隔の一部分を含めて$n=1\sim\infty$の車頭間隔が発生し、しかもこれらの車頭間隔はすべてTより小さくなければならない。このことを考慮して式(6)の右辺第2項のラプラス変換をとると

$$\mathcal{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_2 e^{-\lambda_2 x})^{n*}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\left(1-e^{-(s+\lambda_2)T}\right)\right]^n=\frac{\lambda_2\left[1-e^{-(s+\lambda_2)T}\right]}{s+\lambda_2 e^{-(s+\lambda_2)T}}, \quad Re(s)>0$$

したがって式(6)のラプラス変換は次式で与えられる。$w(x)$の平均値は$w^*(s)$をsで微分して$s=0$と

$$w^*(s)=e^{-\lambda_2 T}+e^{-\lambda_2 T}\cdot\frac{\lambda_2\left[1-e^{-(s+\lambda_2)T}\right]}{s+\lambda_2 e^{-(s+\lambda_2)T}}$$

おくことによって、$\bar{x}=\frac{1}{\lambda_2}\left(e^{\lambda_2 T}-1-\lambda_2 T\right)$ (7)

いま、Tを、内側車線上にT以上の車頭間隔があれば外側車線で待っている車が流入できるものとする。ところでこの$\bar{x}$を平均値とする指数分布の密度関数を$g(x)$とおくと

$$g(x)=\frac{1}{\bar{x}}e^{-\frac{x}{\bar{x}}} \tag{8}$$

$g(x)$の分散は$\bar{x}^2$で与えられて、$\bar{x}^2=\frac{1}{\lambda_2^2}\left\{\left(e^{2\lambda_2 T}-2\lambda_2 T e^{\lambda_2 T}-1\right)-2\left[e^{\lambda_2 T}-\left(1+\lambda_2 T+\frac{(\lambda_2 T)^2}{2}\right)\right]\right\}$ (9)

$\lambda_2 T$が1より小さければ $\bar{x}^2 \approx \frac{1}{\lambda_2^2}\left(e^{2\lambda_2 T}-2\lambda_2 T e^{\lambda_2 T}-1\right)$ (10)

ところで式(10)の右辺は式(6)の$w(x)$の分散に等しい。したがって式(5)において、$\mu=1/\bar{x}$, $t=C$とおけば、時刻$t=C$における平均の待ち行列台数はほぼ $\bar{n}=\sum_{n=0}^{\infty} n p_n(C)$ (11)

で与えられる。$\bar{n}$とλ_1, λ_2, CおよびTとの関係については講演時にのべさせていただく。