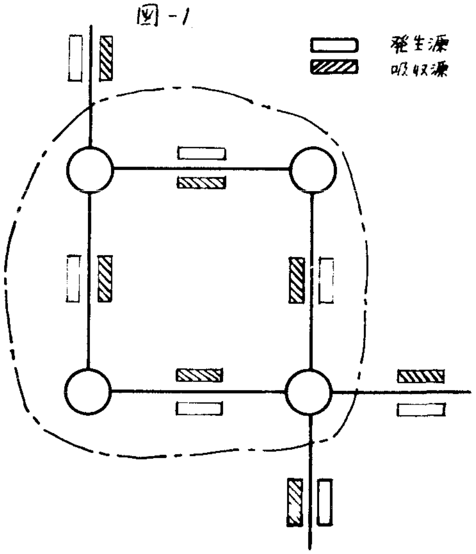
IV-88 マルコフ過程としてみた交通量について

京都大学工学部　正員　○佐佐木綱
京都大学工学部　正員　香川一男

1　概説　　大都市の街路交通を巨視的に眺めてみると，車の流れは交差点で1つの確率に従って方向を変え，また次の交差点へと走行していき，その交差点でまた別の確率に従って方向を変えて流れているように見える。2つの交差点の間で吸収される車もあるし，新たに発生してくる車もある。このような車の流れを1つの吸収マルコフ連鎖として考えて交差点間の交通量を求めてみた。1台の車について考えて見ると，そのドライバーにとってははっきりしたODがあって，このOD間を走行する1つのプロセスとしてルートを選んでいるのであるから，各交差点での直進率，右左折率などの車についても一定であると考えるのは実状を無視した仮定となるであろうが，この点については後に検討するとして，各車とも同一方向で交差点に入る場合，その右左折率，直進率は同じであると仮定する。交通量の発生する所を発生源，交通量の吸収（トリップを終了することを意味する）する所を吸収源と呼ぶことにする。また単位時間に各発生源から発生する車の数を発生交通量，吸収源に吸収される車の数を吸収交通量と呼ぶことにする。ここで考える街路網は図-1に示すように各交差点の間にそれぞれ1個ずつの発生源と吸収源をもち，対象地域外からの各連絡道路に対してはその道路の背後地を代表する発生源と吸収源とを考えることにする。このようなシステムに対して車の動きをマルコフ過程と仮定して，交通量分布を問題にするのである。

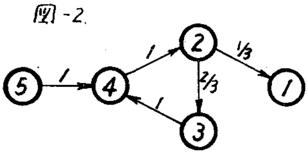
図-1



2　吸収マルコフ連鎖の性質

いま簡単のため，5地点①,②,③,④,⑤を考え，図-2に示すようなシャノン線図によってその遷移確率が与えられているものとする。

図-2



地点④から③へ行く確率は1であり，地点②から①および③へ向う確率はそれぞれ1/3, 2/3であり，矢印の方向にしか車は走らないものとする。このとき毎時5台ずつの車が地点⑤から出発し，与えられた遷移確率にしたがって道路網の中を流れ，最後に地点①に到着してくる場合，各道路には一体いくらの交通量が現れてくるであろうか。このような問題を考えていくうえに，吸収マルコフ連鎖の理論は非常に有用である。この場合，マルコフ連鎖はエルゴード的ではない。すなわちマルコフ連鎖において過程がある特定の状態から他の状態へ移ることができない

ので，吸収的な過程であると考える。いま吸収的な状態（上の例では地点①）がr個あり，非吸収的な状態（地点①以外の地点）s個あるとする。このとき遷移確率行列を標準形

$$P=\left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline R & Q\end{array}\right) \qquad (1)$$

の形に配置しなおしたものとする。ここにIは吸収状態を示すもので，$r\times r$の単位行列，Oは$r\times s$の零行列，Rは$s\times r$の行列，Qは$s\times s$の行列で非吸収状態相互の遷移確率を表わしている。上の例では1個の吸収状態しかないから，I行列は1のみである。すなわちPはつぎの行列である。

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}$$

したがってQは

$$Q=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}$$

となり，一般にこのようにしてえられたQに対して

$$I+Q+Q^2+\cdots = (I-Q)^{-1} \qquad (2)$$

なる関係式が成立する。右辺は$(I-Q)$の逆行列であり，吸収マルコフ連鎖の基本行列とよばれる。非常に面白い性質であるが，この基本行列のij要素はⓘ地点を出発または通過した1台の車がまわりまわってⓙ地点を通過する回数の期待値を表わしている。上の例では$I-Q$はつぎの行列となる

$$I-Q=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array} \qquad (I-Q)^{-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}$$

がえられる。たとえば，2行3列の要素3は地点③を通った1台の車はまわりまわって地点④を3回通過することになることを意味し，4行2列は地点⑤を出発した1台の車は地点③を2回通ることを意味している。いまわれわれが問題としている交通量は，最下行（第4行）のみが意味をもつ。地点⑤を出発した1台の車は②の地点を3回通るから，区間②→①に$3\times\frac{1}{3}=1$台，区間②→③に$3\times 2/3=2$台，配分され，また地点③では2回数えられるので，区間③→④では$2\times 1=2$台，地点④は3回通るので区間④→②の交通量は$3\times 1=3$台となる。また，地点⑤を出発する車の数は毎時5台であるので，定常状態においては以上の値を全部5倍した区間交通量が求める配分交通量となる。この結果を図示すると，図−3のとおりである。地点⑤から流入した交通量と地点①に流出した交通量とはともに等しくなり，各5台である。この例では地点⑤のみから交通量が発生しているのであるが，一般に地点②,③,④,⑤からそれぞれu_2, u_3, u_4, u_5の交通量が発生するのであれば

$$(u_2, u_3, u_4, u_5)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

が各地点を通る交通量であり，この例のように，$u_2=u_3=u_4=0$ であれば

$$(0,0,0,u_5)(I-Q)^{-1}=(3u_5, 2u_5, 3u_5, u_5) \qquad (3)$$

が地点②,③,④,⑤を通過する交通量を示している。また式(3)に非吸収状態から吸収状態への遷移確率を与える行列R（4行1列）を乗ずると吸収源に吸収される交通量vがえられる。すなわち

$$v=(0,0,0,u_5)(I-Q)^{-1}R = u_5 \qquad (4)$$

なる関係が成立する。吸収源が1個であるから地点⑤で発生した交通量はすべて地点①に吸収されているわけである。以上のことを基礎にして，さらに進んだ研究およびその適用法を講演時に発表する。

図−3