

砂の力学では Coulomb の摩擦法則が成立するとして必要な計算を行っている。処でこの法則の中に出て来る内部摩擦角を求めるせん断試験の場合に現われる現象は存外複雑で多くの議論がある。砂のせん断については筆者も多少の研究をしたことがある。当時まだ Dilatancy についてはあまり知られていなかったが、例えばせん断試験の時に現われる所謂降伏現象はこの現象に深い関係があることなどを示すことが出来た。その後多くの人がこの現象に深い関心を持つようになり、内部摩擦角の物理的意味についても研究がなされるようになった¹⁾。結局砂の摩擦抵抗を本当に理解するには砂の粒子性を考慮しなければならないとなうのが結論のようである。Rowe²⁾はこのような考えから等しい径の球の規則的な集りについて論じこれを拡張して一般の場合を論じたのであるが、一般化の処がどうしてもあいまいさを含まることが避けられないようである。筆者は 1953 年に粒状体の力学を統計的に扱う試みを行ったことがあるが、この議論には途中可成り無理な点があり不満足であった。最近この点に改良を加えることが出来たが、それが本論文の内容で紙数の関係で梗概のみを示す。

乾燥した等体積の粒より成る粒状体を考える対象とする粒状体の力学的特性をさめるパラメーターとして普通間隙比を採っているが、これだけでは完全でない。少くとも間隙比の分布をもパラメーターとして採用しなければならない。粒状体中の体積要素の間隙比には大きいものや小さいものがあるがこれを大きい順に $e_1, e_2, \dots, e_n$ のように並べ、それらの間隙比を持つ部分の容積を $V_1, V_2, \dots, V_n$ またそれらの部分内にある粒子の数を $N_1, N_2, \dots, N_n$ とすると、これらを表-1 のように書くことが出来る。

表-1

この表によつて粒状体の状態を現わすことが出来る。つまり実際に今その粒状体がある状態は(1)で現わすことが出来る

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1, e_2, \dots, e_n \\ V_1, V_2, \dots, V_n \\ N_1, N_2, \dots, N_n \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{但し } \sum V_i = V : \text{全容積} \\ \sum N_i = N : \text{全粒子数} \dots (1) \\ \text{また } V_i = (1 + e_i) N_i \end{array}$$

多くの状態の中の一つである。このよう

な考え方から、間隙比がその平均値からあまり大きく離れているようなものは少いとなう仮定を置くと(1)で現わされる一つの状態のあらわれる確率を計算する事が出来る。この確率は $N_1, N_2, \dots, N_n$ によつて変わるのだが実在の状態はあまり特殊なものはないとなうことから $N_1, N_2, \dots, N_n$ を適当に選んだ時最大となるような確率を求めこれを W とする。

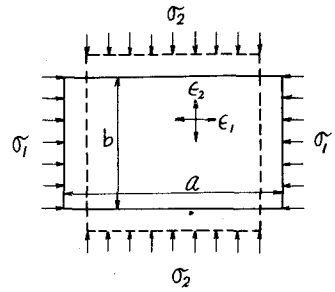
一方粒状体に関する実験観察から、せん断変形が生じる直前には間隙分布が一様に近づくとなうことが確からしいので、その事実を反映させて簡略化を行うと今述べた確率 W は、

$$\log W = 3 \log \sqrt{2\pi} - \log N + \frac{3}{2} \log 2 + eN \log e - N(1+e) \log(1+e) + \frac{N}{2} \frac{1}{e(1+e)} \dots (2)$$

となる。 e は平均間隙比、 1 は間隙比の散らばりの中である。

主応力 σ_1, σ_2 で圧縮される矩形板状の粒状体を考えると単位容積当りにする仕事は σ_1, σ_2 方向のひずみをそれぞれ伸びを正として ϵ_1, ϵ_2 とし、主応力は圧縮を正とすれば、

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_1 \epsilon_1 - \sigma_2 \epsilon_2 &= -p \frac{\Delta e}{1+e} + \tau \Delta \gamma \\ \text{但し } p &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ -\Delta \gamma &= \epsilon_1 - \epsilon_2 \end{aligned} \right\} \text{----- (3)}$$



である。又 $\log W$ を (2) では e と γ との函数として書かれているが、これを e, γ で書くために妥当と思われることとして、 $\log W = F(e - k\gamma)$ 、但し F はある函数 ----- (4) であるとする。 F の形は $\gamma = 0$ の時 $\Delta = 0$ となる条件から定められ結局、

$$\log W = 3 \log \sqrt{2\pi} - \log N + \frac{3}{2} \log 2 + N(e - k\gamma) \log(e - k\gamma) - N(1 + e - k\gamma) \log(1 + e - k\gamma) \text{----- (5)}$$

が得られる。故に単位容積当りのエントロピーとして、 $S = \frac{K}{NT(1+e)} \log W$ ----- (6) とし、 $-p \frac{\Delta e}{1+e} + \tau \Delta \gamma = \Delta S$ ----- (7) とおき、それより、

$$p = K \log \frac{1+e-k\gamma}{e-k\gamma}, \quad \tau = \frac{Kk}{1+e} \log \frac{1+e-k\gamma}{e-k\gamma} \text{----- (8)}$$

が求められる

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{K}{2} \left(1 + \frac{k}{1+e}\right) \log \frac{1+e-k\gamma}{e-k\gamma} \\ \sigma_2 &= \frac{K}{2} \left(1 - \frac{k}{1+e}\right) \log \frac{1+e-k\gamma}{e-k\gamma} \end{aligned} \right\} \text{----- (9)}$$

が得られ二つの主応力の間の関係として

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1 - \frac{k}{1+e}}{1 + \frac{k}{1+e}} \text{----- (10)}$$

となるから

$$\sin \phi = \frac{k}{1+e} \text{----- (11)}$$

とおけば良く知られた関係となる。(4) が成立することから、 $\gamma \neq 0$ とおくと

$$\Delta = 2k\gamma e(1+e) \log \frac{1+e}{e} \text{----- (12)}$$

となる関係が得られるが、これの実験的検証は困難だがそれ程無理とは思われない関係である。

註： 1). 2) の Rowe の論文に於ける引用されている文献、又は Scott の Principle of Soil Mechanics のオ7章参照

2). P.W. Rowe "The Stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact" proc. Royal Soc. London A. Vol. 269