

II-94 井戸への非定常地下水流に対する非線形解

千葉県工業用水部 正員 〇三宅 康夫
北工学部 正員・工博 岸 力

1. 基礎方程式

$$\text{運動方程式} : Q_r = 2\pi r h k \frac{\partial h}{\partial r} \quad (1)$$

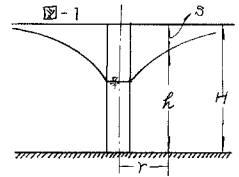
$$\text{連続の式} : \frac{\partial Q_r}{\partial r} = 2\pi r \lambda \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

こゝに 入：地盤の有効空降率

S ：水位降下量

T ：透水量係数

k ：透水係数



(1), (2)式から Q_r を消去すると, S に関する次式が得られる⁽¹⁾。

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{kH}{\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(1 - \frac{S}{H}\right) \frac{\partial S}{\partial r} \right\} + \left(1 - \frac{S}{H}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \right] \quad (3)$$

次の新変数を用い (3) 式をかきかえると, ξ に関する常微分方程式となる。

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{\beta t}}, \quad \beta = \frac{kH}{\lambda} = \frac{T}{\lambda} \quad (4)$$

$$\left(1 - \frac{S}{H}\right) \frac{d^2 S}{d\xi^2} + \left\{ 2\xi + \left(1 - \frac{S}{H}\right) \frac{1}{\xi} - \frac{1}{H} \frac{dS}{d\xi} \right\} \frac{dS}{d\xi} = 0 \quad (5)$$

さらに, $\frac{S}{H} = \xi$ の置きかえを行うと

$$(1 - \xi) \frac{d^2 \xi}{d\xi^2} + \left\{ 2\xi + (1 - \xi) \frac{1}{\xi} - \frac{d\xi}{d\xi} \right\} \frac{d\xi}{d\xi} = 0 \quad (6)$$

S に関する非線形解を求めるために, $\beta = Q/2\pi k H^2$ なるパラメーターを用い ξ が次のように表わされるものとする。

$$\xi = \beta S_1 + \beta^2 S_2 + \beta^3 S_3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i S_i \quad (7)$$

$$\text{こゝに } \beta = \frac{Q}{2\pi k H^2} < 1 \quad (8)$$

(7) 式を (6) 式に代入し β に関して未定係数法を適用すると, 次のような $S_1, S_2, \dots, S_n$ に関する連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 S_1}{d\xi^2} + \left(2\xi + \frac{1}{\xi}\right) \frac{dS_1}{d\xi} &= 0 \\ \frac{d^2 S_2}{d\xi^2} + \left(2\xi + \frac{1}{\xi}\right) \frac{dS_2}{d\xi} - S_1 \frac{d^2 S_1}{d\xi^2} - \frac{S_1}{\xi} \frac{dS_1}{d\xi} - \left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 S_3}{d\xi^2} + \left(2\xi + \frac{1}{\xi}\right) \frac{dS_3}{d\xi} - S_1 \frac{d^2 S_2}{d\xi^2} - S_2 \frac{d^2 S_1}{d\xi^2} - \frac{S_1}{\xi} \frac{dS_2}{d\xi} - \frac{S_2}{\xi} \frac{dS_1}{d\xi} - 2 \frac{dS_1}{d\xi} \frac{dS_2}{d\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

2. 初期条件および境界条件

$$\begin{array}{ll} \text{初期条件} & t=0 : S=0 \\ \text{境界条件} & r=\infty : S=0, \\ & r=0 : Q_r=Q \end{array}$$

これをかきかえると,

$$\xi=\infty : S=0, \quad \xi=0 : Q_r=Q$$

となる。この後者の条件は, $\xi, S, \frac{dS}{d\xi}$ 等を使って置きかえられる。すなわち, 運動方程式は次のようにかきかえられる。

$$\frac{Q_r}{2\pi k H^2} = -(1 - \xi) \frac{\partial S}{\partial r} = -(1 - \xi) \frac{\partial S}{\partial \xi} \xi$$

左辺は $r=0, Q_r=Q$ で ξ になるので

$$\delta = -(1-S)\xi \frac{dS}{d\xi}, \quad \xi \rightarrow 0 \quad (10)$$

(1)式およびその微係数 $\frac{dS}{d\xi}$ を(10)式に代入すると、次の関係式が得られる。

$$\xi \frac{dS}{d\xi} = -1, \quad S \frac{dS}{d\xi} = \frac{dS_1}{d\xi}, \quad S \frac{dS}{d\xi} + S_1 \frac{dS_1}{d\xi} = \frac{dS_2}{d\xi}, \quad \xi \rightarrow 0 \quad (11)$$

他の境界条件からは、当然(12)式の結果を得る。

$$S_1 = S_2 = S_3 = \dots = 0, \quad \xi \rightarrow \infty \quad (12)$$

3. 関数 S_1, S_2, S_3 の決定

1) (9)の第一式を積分すると(13)式が得られる。

$$\frac{dS_1}{d\xi} = C \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} \quad (13)$$

与えられた条件から $C = -1$ を得る。さらに積分すると、次のようになる。

$$S_1 = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi'^2}}{\xi'} d\xi' \quad (14)$$

2) 上の結果を利用すると、(9)の第二式は次のように簡単化される。

$$\frac{dS_2}{d\xi} + (2\xi + \frac{1}{\xi}) \frac{dS_1}{d\xi} + (2S_1 - \frac{dS_1}{d\xi}) \frac{dS_1}{d\xi} = 0 \quad (15)$$

ξ が小さくなると $\frac{dS_1}{d\xi}$ に比べ、 $2S_1$ を省略することが出来る。両者の比較を表-1に示す。(2)うにし S_2 は(16)式から求められる。

$$\frac{dS_2}{d\xi} + (2\xi + \frac{1}{\xi}) \frac{dS_1}{d\xi} = \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2} \quad (16)$$

(16)式の解は常微分法により求めることができる。

表-1

ξ	0.69	0.49	0.40	0.35	0.28	0.23	0.20
$\frac{2S_1}{(\frac{dS_1}{d\xi})}$	0.29	0.22	0.21	0.20	0.14	0.13	0.09

右辺が0の場合の解は

$$\frac{dS_1}{d\xi} = C \frac{e^{-\xi^2}}{\xi}$$

これを(16)式に代入すると、パラメータ C は、 $\frac{dC}{d\xi} = \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2}$ を満足すべきことがわかる。これを(16)式と比較すると次のようになる。

$$C = -(S_1 + C_1)$$

故に S_2 は次式により与えられる。(11)の第二式から $C_1 = 0$ になり、一方(12)式を考慮せると(11)式のようなになる。この結果は(11), (12)式からもより簡単に求められる。

$$\frac{dS_2}{d\xi} = (S_1 + C_1) \frac{dS_1}{d\xi}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1^2 \quad (17)$$

3) 前節の最後のことから S_3 の求め方も暗示される。(11)の第三式と(12)式から(18)式を仮定できる。

$$S_3 = S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{2} S_1^3 \quad (18)$$

(18)式を(9)の第三式に代入してみる。もし $2S_1$ を $\frac{1}{\xi}$ に比べ省略できるなら、(18)式が S_3 の解になる。

S_3 は ξ が小さいとき重要になるのでこの仮定は許されることになる。

4) 同様の計算を続けることにより、関数 S_n を求めることができるが、実用性を考えると第三式までとれば十分である。以上の計算から次の解が求められる。

$$S = S_1 + \frac{1}{2} (S_1)^2 + \frac{1}{2} (S_1)^3 \quad (19)$$

$$\text{こゝに } S_1 = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi'^2}}{\xi'} d\xi', \quad \delta = \frac{Q}{2\pi R H^2} \quad (20)$$

4. 本理論の適用例

1) 現場揚水試験との比較⁽⁴⁾

$Q = 2.3 \times 10^{-4} \text{ (m}^3\text{/sec)}, H = 11.7, \lambda = 0.03$
 $k = 2.5 \times 10^{-5} \text{ (m/sec)}, r = 2.4, \beta = \frac{RH}{S} = 10^{-2}$
 $\delta = \sqrt{\frac{Q}{\pi k}} = 12/\sqrt{E}, \delta = \frac{Q}{2\pi k H} = 3.32 \times 10^{-2}$

(表2参照, この場合は, δ が非常に小さ
 いので第一近似からの修正量は2~3%以
 内である。¹³⁾

2) 揚水量 Q が前例の10倍のときの数値計
 算例, $Q = 2.3 \times 10^{-3} \text{ (m}^3\text{/sec)}, \delta = 3.32 \times 10^{-1}$
 この場合修正量は, 第一近似の20~30%

になる。もしこれを考えなければ透水係
 数を過小に見積ることになるであろう。
 (表2参照)

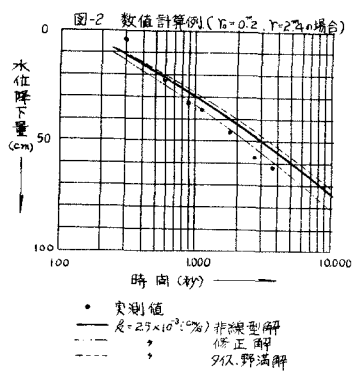
3) 観測井が井戸中心に近い場合と離れ
 いる場合に対するタイヌ野満, 本理論,
 修正式の数値計算例を図2, 3に示した。
 これによると, 本理論に対し, タイヌ野
 満式は透水係数を過小に見積り, また

表-2

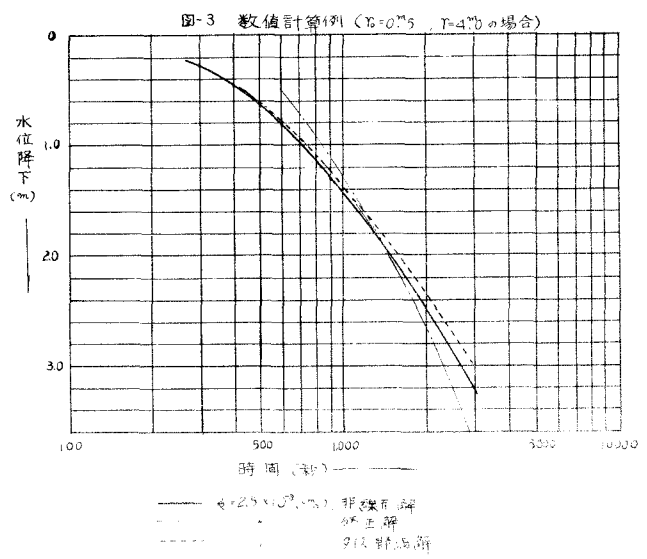
t (sec)	S	$U-S^2$	$W(U)$	$\frac{1}{2} W(U)$	$S S_1$	S_{1st}	S_{1st}
300	0.090	0.42	0.5282	0.262	9.0×10^{-3}	1.19×10^{-1}	3.4×10^{-2}
600	0.450	0.24	1.0062	0.503	1.28×10^{-2}	2.45×10^{-1}	2.2×10^{-1}
900	0.400	0.16	1.4092	0.705	2.33×10^{-2}	2.80×10^{-1}	3.13×10^{-1}
1,200	0.348	0.12	1.6575	0.830	2.75×10^{-2}	3.32×10^{-1}	3.61×10^{-1}
1,800	0.232	0.03	2.0289	1.013	3.36×10^{-2}	4.2×10^{-1}	4.66×10^{-1}
2,700	0.230	0.053	2.416	1.206	4.00×10^{-2}	4.30×10^{-1}	5.24×10^{-1}
3,600	0.200	0.040	2.6813	1.340	4.45×10^{-2}	5.40×10^{-1}	6.06×10^{-1}
5,400	0.165	0.077	3.0615	1.531	5.06×10^{-2}		

表-3

t (sec)	$S S_1$	$\frac{1}{2} (S S_1)^2$	$\frac{1}{2} (S S_1)^3$	S	S (本解)	S (タイヌ野満)
300	9.0×10^{-2}	4.8×10^{-3}	4.6×10^{-4}	1.02×10^{-1}	1.20	1.14
600	1.28×10^{-1}	1.6×10^{-2}	2.8×10^{-3}	1.97×10^{-1}	2.31	2.10
900	2.33×10^{-1}	2.7×10^{-2}	6.3×10^{-3}	2.66×10^{-1}	3.14	2.75
1,200	2.75×10^{-1}	3.8×10^{-2}	1.0×10^{-2}	3.23×10^{-1}	3.81	3.24
1,800	3.36×10^{-1}	6.57×10^{-2}	2.0×10^{-2}	4.13×10^{-1}	4.87	3.96
2,700	4.00×10^{-1}	0.80×10^{-1}	3.2×10^{-2}	5.12×10^{-1}	6.05	4.71
3,600	4.45×10^{-1}	0.99×10^{-1}	4.4×10^{-2}	5.23×10^{-1}	6.94	5.25
5,400	5.06×10^{-1}	1.23×10^{-1}	6.2×10^{-2}	6.8×10^{-1}	8.12	5.91



修正式は過大にみち傾向があるこ
 とが分る。



参考文献

- (1) 野淵隆司「井戸理論とその応用」(2巻) 地質学雑誌, 37, 1
- (2) 井戸理論とその応用
- (3) 井戸理論とその応用
- (4) 井戸理論とその応用