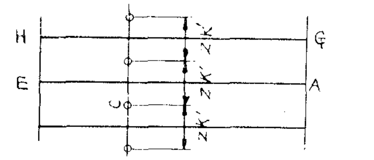
II-90 井戸を含んだ長方形浸透領域内の流れ

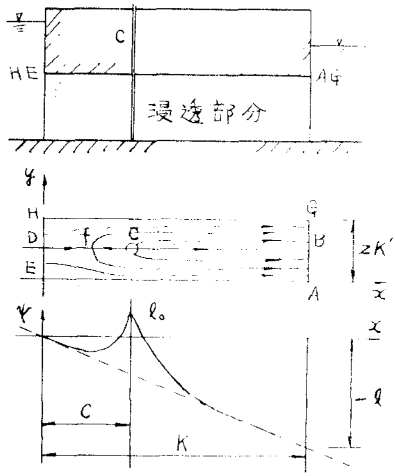
正員　東京大学　嶋 祐之
学生員　東大大学院　○荻原国宏

(1) はじめに

ここに扱ったのは、図－1に表はされるような浸透領域に、平面図で表はしたような、井戸を2K'の間隔に作って各井戸より、同じ様に揚水又は注水を行ったときに生ずる流れの問題である。さて問題は長方形の領域AGHEの中央線上に、井戸Cを設けた場合の地下水の問題に帰着される。我々は、これを図－2に示した流線、ポテンシャルをもつ領域の問題とし、等角写像により、井戸のポテンシャル、井戸の流量の変化によって生ずる種々な流れについて考え、ある限界状態の生ずるための条件を求めた。この問題の解は、河口貯水池で堤体より浸入する海水を防止する一つの手段になり得るものと考えられる。



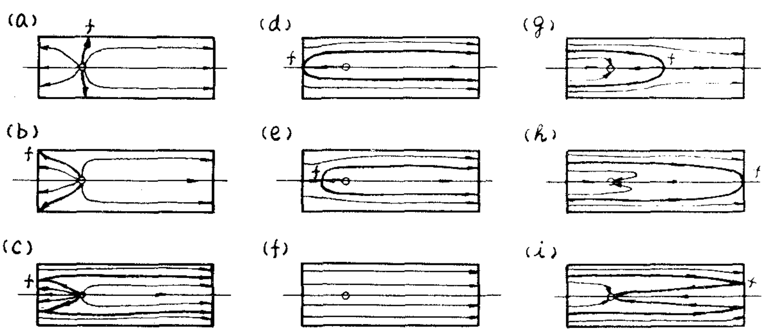
図－1



図－2

(2) 井戸のポテンシャルの変化によって生ずる流れ

さて図－2において、AG、EHはそれぞれ$\varphi=0$, $\varphi=-\ell$の一定ポテンシャルを持ち、又EA、HGは境界流線であり、CF、CBが流線となっている。そこで、それぞれの流函数を次の様におく。EA：$\psi=0$, CG：$\psi=-Q_1$, CB：$\psi=-Q_2$ 又領域の巾を2K' 長さをK、DC間をCと表はす。我々は厳密解として、下流端ABG [illegible] 場合と、ABGが一定のポテンシャルを持たない場合の近似解とを [illegible] いて示すが、数値計算は近似解のものについて示す事にする。井戸のポ [illegible] 戸は注水井戸（$\ell_0>-\ell$全）にも揚水井戸（$\ell_0<-\ell$全）にもなりうる。 [illegible] 中に生ずる流線も種々と変化してくる。その模様を図－3に示す。 [illegible] って井戸のポテンシャルは減少して行っている。(a)～(e)までは注水井戸（Source）[illegible] は揚 [illegible] [illegible] 井戸 [illegible] 注水井戸 [illegible] [illegible] までの問題である。特に限界状態に当る(b)(h)について注目する。(b)は上流端より下流端に向う流れのない限界状態



図－3

あり、(d)は井戸より注水した水が全く上流側に流れ込まぬ限界状態である。次に、それらの限界状態が、どの様な条件のもとにおいて生ずるかを求めてみることにする。

(3) 等角写像による理論解[1]

図-2のような状態での井戸より流れ込む流量ψ_c、EH端より流れ込む流量をψ_{EH}、AG端より流出する流量をψ_{AG}で表はすとき、それらは井戸のポテンシャルℓ_o、上下流端のポテンシャル差ℓを使って次の様に書ける。

$$\frac{\psi_c}{\psi_o} = \frac{\pi\frac{K}{K'}\left(\frac{c}{K}+\frac{\ell_o}{\ell}\right)}{\log\frac{\vartheta_1\left(\frac{c}{K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{r}{2K}\right)}} \qquad \text{但し } \psi_o = \frac{\ell}{K}\cdot 2K' \qquad (1)$$

$\vartheta_1(x)$：テータ函数

r：井戸の半径

$$\frac{\psi_{AG}}{\psi_o} = 1+\frac{c}{K}\cdot\frac{\psi_c}{\psi_o}, \qquad \frac{\psi_{EH}}{\psi_o} = 1-\frac{\psi_c}{\psi_o}\left(1-\frac{c}{K}\right) \qquad (2)$$

(1)に対する近似解は

$$\frac{\psi_c}{\psi_o} = \frac{\pi\frac{K}{K'}\left(\frac{c}{K}+\frac{\ell_o}{\ell}\right)}{\log\frac{\sinh \pi c/K'}{\sinh \pi r/2K'}-\left(\frac{c}{K}\right)^2\frac{\pi K}{K'}} \qquad (3)$$

次に(b)、(d)の状態の時に成立たねばならない条件について求める。(b)ではEH上での流函数ψの極値を持つ点fがE点と一致した状態である。すなわち、$\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$, $z=iy$, $y=0$によって求まり、条件式は

$$\frac{\psi_c}{\psi_o} = \frac{\pi K}{K'}\,\frac{\vartheta_0\left(\frac{c}{2K}\right)}{\vartheta_0'\left(\frac{c}{2K}\right)} \qquad \text{但し } \vartheta_0'(x)=\frac{d}{dx}\vartheta_0(x),\quad \vartheta_0(x)=1+\sum_1^\infty(-1)^m 2h^{m^2}\cos 2m\pi x,\quad h=e^{-\frac{\pi K'}{K}} \qquad (4)$$

近似解では

$$\frac{\psi_c}{\psi_o} = \frac{1}{\tanh\left(\frac{\pi K}{2K'}\frac{c}{K}\right)-\frac{c}{K}} \qquad (5)$$

又(d)はCD線上のポテンシャルの極値を持つ点f（図-3の(d)）がDに一致した場合で$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$, $z=iK+x$, $x=0$,により求まる。

$$\frac{\psi_c}{\psi_o} = \frac{\pi K}{K'}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{c}{2K}\right)}{\vartheta_1'\left(\frac{c}{2K}\right)} \qquad \vartheta_1(x)=\sum_0^\infty(-1)^m 2h^{(m+\frac{1}{2})^2}\sin(2m+1)\pi x \qquad (6)$$

$$\frac{\psi_c}{\psi_o} = \frac{1}{\coth\left(\frac{\pi K}{2K'}\frac{c}{K}\right)-\frac{c}{K}} \qquad \text{（近似解）} \qquad (7)$$

(4) 数値計算結果及び結語

(2)(3)により$K/K'=5$のものに対する数値計算の結果は図-4に示すごとくなっている。但し(b)に対するものである。これらの各値に対する井戸のポテンシャルを求める場合には、(1)(3)式に$\frac{\psi_c}{\psi_o}$の値を入れる事により簡単に求まる。但しこの場合には井戸の径も関係してくる。K/K'の値が大きくなれば厳密解の計算が難しくなる。（$K/K'>8\sim10$）その様な場合には近似解によるのが良いと思はれる。又K/K'の小さい時に近似解で計算すれば、近似性のための誤差が入ってくる。井戸を作る事によって上流側よりの水の浸入を防止する場合の井戸の位置は、井戸に与えるべき流量及びポテンシャルにより自ずから決ってくるわけである。その際に図-4の曲線が判断の材料となる。

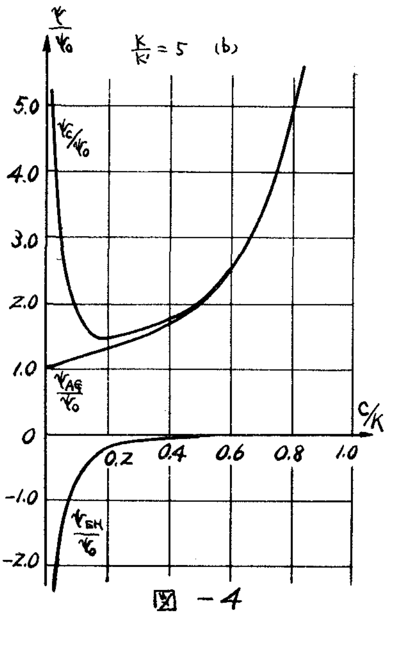


図-4

参考文献 ①関西電力への報告書（昭37）　嶋 祐之

②東大土木 Collected Papers Vol 3, Shima, Ogihara 投稿中