II－57　波動の層流境界層理論による底面摩擦応力について

京都大学防災研究所　正会員　°土屋義人・陳活雄

1．緒言　進行波による層流境界層の発達に関しては，Stokesの解に基づく線型理論があって，その結果が底面摩擦による波高減衰に関する著者ら('61,'64)，Eagleson('62)およびGrosch-Lukasik('61,'63)らの研究の基礎になっている。その場合，層流境界層の発達に対して，層流境界層方程式に含まれるconvective termがどのように影響するかが問題である．すでにGrosch('62)はGlauertの方法によって，非線型方程式の級数解を示しているが，級数展開の表示が適確でないために，波動運動の全周期にわたる議論ができない。そこで，著者らは無次元表示した波動の層流境界層方程式のせつ動解を求めて，底面摩擦応力や境界層内におけるエネルギーの消散に及ぼすconvective termの影響を検討することにした。なお，底面摩擦による波高減衰の実験を行なう場合には，水槽の側壁における境界層の発達が問題になるので，同様に考察する。

2．波動の層流境界層理論と底面摩擦応力　層流境界層方程式は波の進行方向に x，底面に垂直に z とし，それぞれの方向における流速成分を u および w とすれば，次式であたえられる。

$$\partial u/\partial t+u\partial u/\partial x+w\partial u/\partial z=-(1/\rho)\partial P/\partial x+\nu\partial^2u/\partial z^2,\quad \partial u/\partial x+\partial w/\partial z=0,\ -(1/\rho)\partial P/\partial x=\partial U/\partial t+U\partial U/\partial x \tag{1}$$

ここに，t：時間，P：圧力，ν：動粘性係数，ρ：密度，U：境界層外縁における流速であって，波動理論から求められる関係が適用されるものとする。いま，流速の代表値を u_0，長さの代表値として波長 L，および波速 c を導入して，無次元量 $u=\bar{u}u_0$，$w=u_0\bar{w}/\sqrt{R}$，$U=u_0\bar{U}$，$R=cL/2\pi\nu$，$P=\rho u_0^2\bar{P}$，$x=(L/2\pi)\xi$，$z=(L/2\pi\sqrt{R})\zeta$，$t=(L/2\pi c)\tau$ を用いて，(1)式を書きかえれば，

$$\partial\bar{u}/\partial\tau+(u_0/c)\{\bar{u}\partial\bar{u}/\partial\xi+\bar{w}\partial\bar{u}/\partial\zeta\}=\partial\bar{U}/\partial\tau+(u_0/c)\bar{U}\partial\bar{U}/\partial\xi+\partial^2\bar{u}/\partial\zeta^2,\quad \partial\bar{u}/\partial\xi+\partial\bar{w}/\partial\zeta=0 \tag{2}$$

となり，初期および境界条件はそれぞれ，$\tau=0$ で $\bar{u}=0$，$\zeta=0$ で $\bar{u}=0$ および $\zeta\to\infty$ で $\bar{u}=\bar{U}$ である。

いまAiryの波動理論にもとづく進行波を対象とし，u_0 として底面における最大水粒子速度を用いれば，$\bar{U}=\sin(\xi-\tau)$，$u_0=(\pi H/T)/\sinh kh$，$k=2\pi/L$，および $(u_0/c)=\pi(H/L)/\sinh kh\ll 1$ となるので，(2)式の $(u_0/c)=\varepsilon$ によるせつ動解を求めることができる。すなわち，$\bar{u}=\bar{u}_0+\varepsilon\bar{u}_1+\varepsilon^2\bar{u}_2+\cdots$，$\bar{w}=\bar{w}_0+\varepsilon\bar{w}_1+\varepsilon^2\bar{w}_2+\cdots$ として，これらを(2)式に代入すれば，次式がえられる。

$$\left.\begin{aligned}
&\partial\bar{u}_0/\partial\tau-\partial^2\bar{u}_0/\partial\zeta^2=-\cos(\xi-\tau),\ \partial\bar{u}_0/\partial\xi+\partial\bar{w}_0/\partial\zeta=0:\ \bar{u}_0=0,\ \tau=0;\quad \bar{u}_0=0,\ \zeta=0;\ \bar{u}_0=\sin(\xi-\tau),\ \zeta\to\infty,\\
&\partial\bar{u}_1/\partial\tau-\partial^2\bar{u}_1/\partial\zeta^2=-(\bar{u}_0\partial\bar{u}_0/\partial\xi+\bar{w}_0\partial\bar{u}_0/\partial\zeta)+\bar{U}\partial\bar{U}/\partial\xi,\ \partial\bar{u}_1/\partial\xi+\partial\bar{w}_1/\partial\zeta=0:\ \bar{u}_1=0,\ \tau=\zeta=0,\ \zeta\to\infty,\\
&\partial\bar{u}_i/\partial\tau-\partial^2\bar{u}_i/\partial\zeta^2=F_i(\zeta,\tau),\ \partial\bar{u}_i/\partial\xi+\partial\bar{w}_i/\partial\zeta=0:\ \bar{u}_i=0,\ \tau=\zeta=0,\ \zeta\to\infty.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(3)式中の $\bar{u}_0$ に関するものは，いわゆる線型理論そのものであって，その解は次式であたえられる。

$$\bar{u}_0=\sin(\xi-\tau)-e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\sin\left(\xi+\tau+\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta\right)+(2/\pi)\int_0^\infty\{\sigma\sin(\zeta\sigma)/(1+\sigma^4)\}\exp(\xi-\tau)\sigma^2d\sigma\ \text{(Grosch)} \tag{4}$$

つぎに，$\bar{u}_1$ 以下のものたとえば $\bar{u}_i$ の解は，その方程式が熱伝導の方程式であるから，Green関数 $H(\zeta\tau;\eta,s)$ を導入して求めることができ，$\bar{u}$ に対するせつ動解は形式的にはつぎのようにあらわすことができる。$\bar{u}(\xi,\zeta,\tau)=\bar{u}_0+\varepsilon\int_0^\tau ds\int_0^\infty H(\zeta,\tau;\eta,s)F_1(\eta,s)d\eta+\varepsilon^2\int_0^\tau ds\int_0^\infty H(\zeta,\tau;\eta,s)F_2(\eta,s)d\eta+\cdots$

ここに，$H(\zeta,\tau;\eta,s)=\{1/2\sqrt{\pi(\tau-s)}\}[\exp\{-(\zeta-\eta)^2/4(\tau-s)\}-\exp\{-(\zeta+\eta)^2/4(\tau-s)\}]$：$\tau>s$，$H=0$：$\tau<s$。一般に上式の積分を行なうことができないので，以下ではいわゆるsteady state solutionのみを対象として，

(3)式の解を求めることにする。(3)式右辺第3項を省略した $\bar{u}_0$ の steady state solution を用いると、$\bar{u}_1$ に対する方程式は、結局つぎのようになる。

$$\partial\bar{u}_1/\partial\tau-\partial^2\bar{u}_1/\partial\zeta^2=\{(1/2)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\cos(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta)+(1/2)\zeta e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\cos(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta-\tfrac{\pi}{4})\}\sin 2(\xi-\tau)+\{(1/2)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta)-(1/2)\zeta\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta-\tfrac{\pi}{4})\}\cos 2(\xi-\tau)+\{(1/2)\zeta e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta-\tfrac{\pi}{4})+(1/2)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\cos(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta)-(1/2)e^{-\sqrt{2}\zeta}\} \quad (5)$$

境界条件 $\bar{u}_1=0$; $\zeta=0$, $\partial\bar{u}/\partial\zeta=0$; $\zeta\to\infty$ を満足する(5)式の解は簡単に求められるので、$\bar{u}$ に対する解として、つぎの近似解を示すことができる。

$$\bar{u}\approx\sin(\xi-\tau)-e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\sin(\xi-\tau+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta)+\varepsilon\Big[\{(11/18)e^{-\zeta}\sin\zeta-(7/18)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta)+(1/16)\zeta e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta-\tfrac{\pi}{4})\}\cdot\sin 2(\xi-\tau)+\{-(11/18)e^{-\zeta}\cos\zeta+(11/18)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\cos(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta)+(1/6)\zeta e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\cos(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta-\tfrac{\pi}{4})\}\cos 2(\xi-\tau)+\{(1/4)e^{-\sqrt{2}\zeta}+(1/2)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta)-e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\cos(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta)-(1/2)\zeta e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta}\sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\zeta+\tfrac{\pi}{4})+\tfrac{3}{4}\}\Big]+O(\varepsilon^2) \quad (6)$$

この結果によると、$\zeta\to\infty$ すなわち境界層の外縁において mass transport velocity $\bar{u}_m=(3/4)\varepsilon$ が存在することになる。この値は $u_m=(3/16)H^2k(2\pi/T)/\sinh^2kh$ とかきかえられて、Longuet-Higgins('53) の結果と一致する。(6)式にもとづく底面摩擦応力は、次式であらわされる。

$$\tau_0/\rho u_0^2\approx R_e^{-1/2}[\sin(\xi-\tau-\tfrac{\pi}{4})+\varepsilon\{\tfrac{1}{2\sqrt{2}}+(\tfrac{11}{18}-\tfrac{5\sqrt{2}}{18})\sin 2(\xi-\tau)+(\tfrac{11}{18}-\tfrac{4\sqrt{2}}{18})\cos 2(\xi-\tau)\}+O(\varepsilon^2)], \quad (7)$$

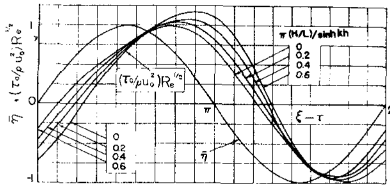
ここに、$R_e=(\pi/2)(CH/\nu)(H/L)/\sinh^2kh=(1/2\pi)u_0^2T/\nu$。図は(7)式の計算結果であって、$\varepsilon$ によって若干その特性が変わることがわかる。同様な考察は Stokes wave についても計算することができる。

水槽側壁における境界層に対しては、(2)式に対応した方程式は鉛直方向に z をとって、次式となる。

$$\partial\bar{u}/\partial\tau+\varepsilon(\bar{u}\partial\bar{u}/\partial\xi+\bar{v}\partial\bar{u}/\partial\eta+\bar{w}\partial\bar{u}/\partial\zeta)=\partial\bar{U}/\partial\tau+\varepsilon(\bar{U}\partial\bar{U}/\partial\xi+\bar{W}\partial\bar{U}/\partial\zeta)+\partial^2\bar{u}/\partial\eta^2,\quad \partial\bar{w}/\partial\tau+\varepsilon(\bar{u}\partial\bar{w}/\partial\xi+\bar{v}\partial\bar{w}/\partial\eta+\bar{w}\partial\bar{w}/\partial\zeta)=\partial\bar{W}/\partial\tau+\varepsilon(\bar{U}\partial\bar{W}/\partial\xi+\bar{W}\partial\bar{W}/\partial\zeta)+\partial^2\bar{w}/\partial\eta^2,\quad \partial\bar{u}/\partial\xi+\partial\bar{v}/\partial\eta+\partial\bar{w}/\partial\zeta=0, \quad (8)$$

前述した場合と同様な(8)式のせつ動解は、つぎのようになる。

$$\bar{u}\approx\{\sin(\xi-\tau)-e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta}\sin(\xi-\tau+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\eta)\}\cosh\zeta+\varepsilon[-\{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta}\sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\eta)+(1/4)e^{-\sqrt{2}\eta}\sin(\sqrt{2}\eta)+e^{-\eta}\sin\eta\}\sin 2(\xi-\tau)+\{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta}\cos(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\eta)+(1/4)e^{-\sqrt{2}\eta}\cos(\sqrt{2}\eta)-(5/4)e^{-\eta}\cos\eta\}\cos 2(\xi-\tau)]+O(\varepsilon^2),\quad \bar{v}\text{(省略)},\quad -\bar{w}\approx\{\cos(\xi-\tau)-e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta}\cos(\xi-\tau+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\eta)\}\sinh\zeta-\varepsilon\{(1/4)e^{-\sqrt{2}\eta}+e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta}\sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\eta)-\tfrac{1}{4}\}\sinh 2\zeta+O(\varepsilon^2) \quad (9)$$



3. 層流境界層におけるエネルギーの消散

底面の境界層内で粘性による単位面積当りの消散エネルギー $\bar{E}_{fb}$ は、近似的につぎのようにあらわすことができる。

$$\bar{E}_{fb}=(\mu u_0^2/L)\sqrt{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}(\partial\bar{u}/\partial\zeta)^2d\zeta d\xi\approx(\mu\beta/2)(\pi H/T)^2\mathrm{cosech}^2kh\{1-(8\sqrt{2}/3\pi)(33/54-273\sqrt{2}/864)\varepsilon+O(\varepsilon^2)\} \quad (10)$$

なお、Stokes wave の場合には、近似的に次のようにあらわされる。

$$\bar{E}_{fbs}\approx(\mu\beta/2)(\pi H/T)^2\mathrm{cosech}^2kh[1+(8\sqrt{2}/3\pi)\{273\sqrt{2}/864-33/54+(1/6-\sqrt{2}/12)(15\sqrt{2}/4)/\sinh^2kh\}\varepsilon+O(\varepsilon^2)],\quad \beta=\sqrt{\pi/\nu T} \quad (11)$$

したがって、$\sinh kh\ll 1$ となると、Stokes wave としての効果があらわれ、$\bar{E}_{fbs}$ は増大する。水槽側壁における損失エネルギー $\bar{E}_{fw}$ は、次式となる。

$$\bar{E}_{fw}\approx(\mu u_0^2/2\pi h)\sqrt{R}\int_0^{kh}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}\{(\partial\bar{u}/\partial\eta)^2+(\partial\bar{w}/\partial\eta)^2\}d\eta\, d\xi\, d\zeta\approx(\mu\beta/2kh)(\pi H/T)^2\coth kh\{1+(8\sqrt{2}/3\pi)(11/12-\sqrt{2}/120)\varepsilon\,\mathrm{sech}\,kh+O(\varepsilon^2)\} \quad (12)$$

すなわち、側壁においては $\varepsilon\,\mathrm{sech}\,kh$ 程度損失エネルギーは増大することになる。

4. 結語

以上の計算結果から、つぎのことが結論される。層流境界層方程式に含まれる convective term の底面摩擦力および消散エネルギーに及ぼす効果は、とくに後者の場合底面においては高々 0.2ε 程度の減少で、あまり大きな影響を及ぼさないが、側壁では $\varepsilon\,\mathrm{sech}\,kh$ 程度の増大としてあらわれる。また Stokes wave の場合には、$\sinh kh\ll 1$ となると損失エネルギーは増大する傾向にある。