II－54　半円形湾内の副振動について

神戸大学工学部　正員　杉本修一

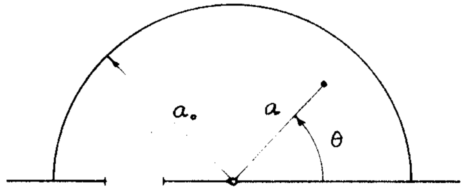
港湾の港口幅を狭くすれば，港湾内のサージングが減小するとは限らず，逆に増大するような結果を導くこともありうる。外海の波浪の周期と港湾内のサージングの固有振動周期との共振と考えれば，このような現象が起り得るであろうことは容易に想像されることであるが，初めて "Harbor Paradox" と称して矩形の港湾について考えたのは周知のように J. Miles and W. Munk (1961) である。この現象を共振現象と考えれば，先ず港湾内のサージングの固有振動周期について考えることが必要がある。このような観点から筆者は矩形港湾よりも，もう少し実際的な半円形港湾の開口部の幅によって如何に港湾内サージングの固有振動周期が変化するか。を考えたのがこの報告である。

いま，a_0 を周辺の半径，a を円の中心より任意の点までの距離として，$\alpha = a/a_0$，θ を回転角とし，T を固有振動周期，$\sigma = 2\pi/T$，

g を地球重力，h を水深かつ一定として

$\lambda = \sigma a_0/\sqrt{gh}$ とすれば波動方程式はよく知られているように次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2} + \lambda^2\zeta = 0. \qquad (1)$$



そこで，先ず，極端な2つの場合について考える。

1つは半円の直径の部分が全部閉じていて半円形の湖であるような場合，他の場合は半円形の直径の部分が全く無い場合について考えてみる。以下，前者を closed，後者を open と略称することにする。

Closed の場合。

$$\zeta = \sum_{m=1}^{\infty} A_m\left(-\varphi + 28\zeta^3 - 64\varphi^5\right)\left(\alpha - \frac{\alpha^{m+1}}{m+1}\right),\quad \varphi = \frac{\theta}{\pi}. \quad \text{(と仮定する)} \qquad (2)$$

$$I = \int_0^1\int_0^1\left\{\alpha\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\right)^2 - \lambda^2\alpha\zeta^2\right\}d\alpha\, d\varphi. \qquad (3)$$

式(2)を式(3)に代入して，この積分値が最小となるように $\partial I/\partial A_1 = 0$，$\partial I/\partial A_2 = 0$，$\partial I/\partial A_3 = 0$，………を求め，これらの聯立方程式より A_1，A_2，A_3……を消去すれば $\lambda = 1.0$ を得る。

Open の場合。

$$\zeta = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n 4\frac{n+1}{n}\left(\varphi - \varphi^2\right)\left(\alpha - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\right) \quad \text{(と仮定する)} \qquad (4)$$

式(4)を式(3)に代入して，前述と同じようにその積分値が最小となるように $\partial I/\partial B_0 = 0$，$\partial I/\partial B_1 = 0$，$\partial I/\partial B_2 = 0$，$\partial I/\partial B_3 = 0$ ………を求め，これらの聯立方程式より B_0，B_1，B_2，B_3……を消去して λ を求めると $\lambda = 4.961$ を得る。

上記2つの場合の λ について考えてみると，closed の場合の方が open の場合よりも

周期 T は長い。これは open の場合には開口部において外海と接しているため，この外海の水が港湾内の振動を防げる役目をするためと考えられる。

たとえば，外海の影響が少いと考えられる瀬戸内海の広島湾を例にとって考えてみると，この広島湾が外海の影響の少いことを考えて湾口部が全く閉じた半円形の場合として，$h=15^{m}$，$2a_0=11.2^{Km}$（土木学会，昭和 32 年度版，水理公式集，p.268）の値を用いて，假りに右図のように半円形を想定して計算してみると，計算値は 48.5 分，観測周期は 60 分，である。実際の湾の形状との差異を考えれば，大体一致していると考えてよい。

つぎに半円形湾の直径の一部分が開いている場合について述べる。

直径の一部分が開いている場合。

この場合における境界条件をつぎのように考える。

$$\text{at} \quad a=a_0, \quad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)=0. \qquad (5)$$

$$\text{at} \quad \theta=0, \quad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)=f_0(a), \qquad \text{at} \quad \theta=\pi, \quad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)=f_\pi(a). \qquad (6)\ (7)$$

この條件を満足するため，$\zeta=\zeta_1+\zeta_2$ として，ζ_1 および ζ_2 はそれぞれ次ぎの條件を満足するように定める。

$$\text{for } \zeta_1, \quad \text{at } a=a_0, \ \left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial a}\right)=0. \quad \text{at } \theta=0, \ \left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\theta}\right)=f_0(a). \quad \text{at } \theta=\pi, \ \left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\theta}\right)=0.$$

$$\text{for } \zeta_2, \quad \text{at } a=a_0, \ \left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial a}\right)=0. \quad \text{at } \theta=0, \ \left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial\theta}\right)=0. \quad \text{at } \theta=\pi, \ \left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial\theta}\right)=f_\pi(a). \qquad (8).(9)$$

このように考うれば ζ_1 および ζ_2 はつぎのように假定することが出来る。すなわち，

$$\zeta_1=\sum_{m=0}^{\infty} A_m J_0(p_{m+1}\alpha)\frac{2}{(2m+1)}\sin\frac{(2m+1)}{2}\theta. \qquad (10)$$

$$\zeta_2=\sum_{m=0}^{\infty} B_m J_0(p_{m+1}\alpha)(-1)\frac{2}{(2m+1)}\cos\frac{(2m+1)}{2}\theta. \qquad (11)$$

こゝに，J_0 は 0 次の Bessel 関数であり，p_{m+1} は Bessel 関数の根の内 m 番目のものである。A_m および B_m は境界條件 (8) および (9) より定められる係数である。すなわち，

$$F(\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty} 2K_m J_0(p_m\alpha). \qquad K_m=\frac{1}{J_1^{2}(p_m)}\int_0^1 F(t)J_0(p_m t)t\,dt.$$

境界條件 (5)，(6) および (7) を満足する関数が判明すれば，振動周期はよく知られている普通の方法で求めればよい。