

II-48 流れによる Sand Wave の発生 限界について

九州大学 工学部 正員 橋 東一郎
山口大学 工学部 正員 斎藤 隆

河床上に形成される sand wave 上の流れや砂の動きをみて通ちに気がつくのは、砂波の山に於て流れが剥離してその背後に死水域の形成されること。及び前面の斜面をもつて掃流されてきた砂が山からほどき着き角を等しい急斜面をもって転落し、谷附近から新しい砂の移動が始まることである。したがって、砂面の安定性を吟味して sand wave の発生を知らべる場合、なんらかの形でこの2つの要素をとり入れてみないといへない。本又は剥離について加速、減速流における流速分布の剪断応力の変形をとり入れ、砂の移動は非平衡状態にあるものとして、微少擾乱理論により河床の安定を吟味したもので、その結果は Dune (ripple), Transition (smooth), Anti-dune に関する R.J. Serrin の criterion とほぼ一致する結果が得られた。

流速分布については、流動粘性係数を一定として次式

$$u/u_0 = 1 - 0.5^y, \quad u/u_m = (1 - 0.5^y) / (1 - 0.5^{\frac{y}{\Delta}}) \quad (1)$$

を仮定し、底面の剪断応力が底速度 u_b の2乗に比例するとして

$$\tau_0/\rho = K^2 u_b^2 (1 - \Delta) / (1 - \frac{\Delta}{\Delta_0}), \quad K = K' (h/k_s)^m \quad (2)$$

とおく。Nikuradse の divergent, convergent channel の実験などから、加速、減速流によって速度分布が変形することを見出すため、簡単に

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta' = \Delta_0 + a \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \Delta_0 = b \left(\frac{h}{k_s} \right)^a \quad (3)$$

とおき、同実験の結果を用いて a を決定すると $a \approx 0.0$ となる。

つぎに、砂移動については H.A. Einstein のモデルを用い、砂は平均的に l 移動した後沈定するものとする。

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \alpha P_0 - N/l \quad (4)$$

ここで、 P_0 及び l は local 河床の端に規定され、平衡状態のものに近似されることがある。この式は

$$\frac{\lambda_1 d}{A_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = P - \frac{\bar{P}}{A_0} (1 - P), \quad \bar{P} = \frac{\tau_0}{\sqrt{s g d^3}}, \quad l = \frac{\lambda_1 d}{1 - P}, \quad P = \frac{\bar{P}/A_0}{1 + \bar{P}/A_0} = P(\bar{P}) \quad (5)$$

となる。なお、砂量式としては

$$\bar{P} = 25 \psi^m (1 - \psi_c) (k_s/d)^{-0.44} \quad (m = 1.3) \quad (6)$$

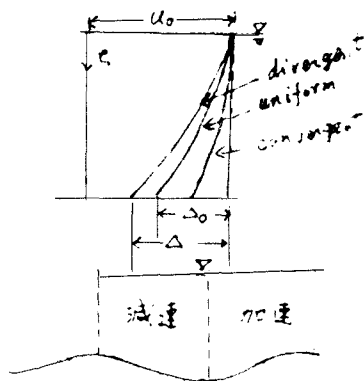
を用い、 k_s は砂が移動していることを考慮して $k_s = 4d$ とおく。上式の ψ は (2), (3) 式より

$$\psi = \frac{\tau_0/\rho}{s g d} = K'^2 \left(\frac{h}{k_s} \right)^{2m} \frac{u_b^2}{s g d} \left(\frac{1 - \Delta}{1 - \frac{\Delta}{\Delta_0}} \right)^2 \quad (7)$$

他に、河床高の式、水流の連続の式および運動方程式は

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \frac{1}{1 - \lambda} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{g h} \frac{\partial}{\partial t} (u_m h) + \frac{1}{g h} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy = -\frac{\tau_0}{\rho g h} + (S_0 - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x}) - \frac{\partial h}{\partial x} \quad (9)$$



1. u_m , $\bar{u}$ および $\bar{u}'$ は、平均値とそれからの偏りからなるものとして

$$h = h_0(1+\chi), \quad u_m = u_{m0}(1+u), \quad \bar{u} = \bar{u}_0(1+\varphi), \quad \bar{u}' = \bar{u}'_0(1+\varphi) \quad (10)$$

とき、微小振幅の仮定を用いて変形すると、無次元形において次の基礎式が得られる。

$$E \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \xi^4} = B[(2n-p)\gamma + 2u - qa \frac{\partial \gamma}{\partial \xi}] - \varphi$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0, \quad \chi \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} = 0 \quad (11)$$

$$M_0^2 \chi \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial \xi} = -\frac{\partial \gamma}{\partial \xi} (1 - S_0 qa) + S_0 (1 - 2n + p) \gamma - 2u S_0 - M_0^2 \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\xi = \tau/h_0, \quad S = \tau/h_0, \quad \tau = t \frac{\sqrt{sgd^3}}{(1-\lambda)h_0} \bar{S}_0, \quad M_0^2 = \frac{u_{m0}^2}{\bar{S}_0 h_0} \quad (12)$$

$$E = \frac{\lambda d}{h_0} (1 + \bar{S}_0 / A_n), \quad B = m + \frac{\chi_0}{\chi_1 - \chi_2}, \quad P = \frac{\frac{4}{3} A_0 \bar{S}_0}{(1 - A_0 \chi_1 - \frac{A_0}{3})}, \quad \gamma' = \frac{\chi_3}{(1 - A_0 \chi_1 - \frac{A_0}{3})}$$

$$\chi = \frac{\sqrt{sgd} d}{u_{m0} h_0} \frac{d}{1-\lambda} \frac{\bar{S}_0}{1-\lambda} = \frac{1}{(1-\lambda)} \frac{\gamma_1}{\gamma}$$

ここで、 $S = S_0 e^{i\tau + i\beta\xi} = S_0 e^{i\gamma_1 \tau + i(\gamma_2 \tau + \beta\xi)}$ とおいて、不安定 ($\gamma_1 > 0$)、安定 ($\gamma_1 < 0$) 及び伝播速度

$w = -\frac{\gamma_2}{\beta}$ の正負をしらべるのであるが、(11)式において χ を零で置けば他の項にくらべて小さく、これを無視すると、 γ は簡単に1次式となる。有理化したものの分子のうち安定に関連するものを

$\gamma' = \gamma'_1 + i\gamma'_2$ とおくと

$$\gamma'_1 = (1 - M_0^2 - qa S_0) \{ qa - E(2 - 2n + p) \} - \{ (3 - 2n + p) S_0 \} \{ E qa + \frac{(2 - 2n + p)}{\beta^2} \} \quad (13)$$

$$-\frac{\gamma'_2}{\beta} = (1 - M_0^2 - qa S_0) \{ qa \beta^2 E + (2 - 2n + p) \} + \{ (3 - 2n + p) S_0 \} \{ qa - E(2 - 2n + p) \}$$

となる。小さい量を見捨てて大雑把な不安定の条件を求めると

$$1 > M_0^2 \text{ (常流) の場合, } qa > E(2 - 2n + p) \text{ のとき } \gamma'_1 > 0 \text{ (不安定), } -\frac{\gamma'_2}{\beta} > 0 \text{ (dune)} \quad (14)$$

$$1 < M_0^2 \text{ (射流) の場合, } qa < E(2 - 2n + p) \text{ のとき } \gamma'_1 > 0 \text{ (不安定), } -\frac{\gamma'_2}{\beta} < 0 \text{ (Anti-dune)}$$

となり、Dune 及び Anti-dune が発生する可能性のあることがわかる。

詳しく、かつ実用的な発生範囲をしらべるために

$$\lambda_1 = 1.00, \quad A_0 = \frac{1}{10}, \quad \beta^2 = 1.58 \text{ (砂の波長 } \lambda = 5h_0) \quad \alpha = 6.0, \quad S = 1.65$$

において、錯位 θ の h/λ に対して

$\gamma_1 = 0$ となる境界線を計算した結果は R. J. Grade のまとめた実験値とともに左図に示されている。図中の錯線は Grade が実験結果を参照してひいた境界線、実際は計算により得られたものである。

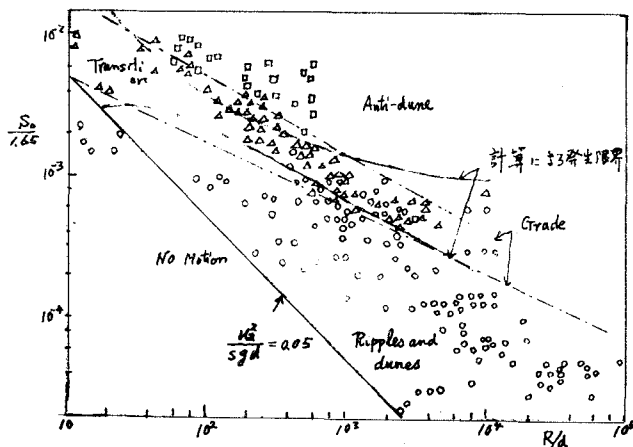


図-2