II-44 輸送砂量の相似則について

大阪大学 工学部 正員 劉 世燁

自然河川では一般にその水理現象，河床の構成材料と河床の形状が非常に複雑であるため，的確な相似則がまだ確立されていない。移動床河川の模型実験の相似性を満足する條件としては，流水の抵抗，Froude 則，輸送砂量 (bed load, suspended load and total load)，流水の連続條件，河床の変動，粒径に対する相当粗度と流水のエネルギー勾配等の9の條件とそれに付随する種々の條件が列挙しうる。本報告はまず相似條件の一つである輸送砂量とこれに付随する支配條件を次元解析に依って考察し，今迄に発表された二，三の式と比較して，妥当な相似條件を提案したものである。

輸送砂量の次元解析：砂粒の運動に関する因子は，流体の密度 ρ，流体の粘性 μ，水中に於ける砂粒の単位重さ $(\sigma-\rho)g$，砂粒の代表粒径 d と bed 付近の流れの dynamic 條件（例へば掃流力τまたは摩擦速度 U_*）等がある，よって bed load に関する流れは次の関数で表わされる：

$$q_B = f(\rho,\ \mu,\ d,\ (\sigma-\rho)g,\ U_*) \quad \text{........(1)}$$

ここに q_B は単位巾単位時間の輸送砂量の重さ。今 ρ，d と U_* を重複変数として整理すると

$$q_B = \rho U_*^3\, f\left(Re_*,\ \frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right) \quad \text{.......(2)}$$

ここに　$Fr_*=U_*^2/gd$，$Re_*=U_*d/\nu$（ν：動粘性係数）。上式から判る様に関数 f は係数と指数を含む式として実験的に求めることができる。

今(2)式をもって Einstein の掃流砂関数

$$\Phi_* = f(\psi_*) \quad \text{.......... (3)}$$

と比較することにしよう。ここに

$$\Phi_* = q_B i_B/i_b \left\{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right)gd^3\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{...........(4)}$$

$$\psi_* = (\xi Y)(1/\theta)(J^2/J_x^2)\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right)(gd/U_*^2) \quad \text{.....(5)}$$

ただし $J^2/J_x^2 = \log_{10}10.6/\log_{10}10.6(Xx'/d_{65})$

さらに i_b と i_B は与えられた砂礫がそれぞれ河床砂および掃流砂に於いて占める割合，ξ：混合砂の遮蔽係数，Y：corrective factor for transition smooth-rough wall，θ：$Re_* < 3.5$ に対する uplift force の corrective factor，J^2/J_x^2：混合砂に対する修正係数（均一粒径の河床砂に対しては1である），d_{65}/x'：effective roughness，x'：d_{65}/δ の関数，X：representative roughness．

相似條件を満たすためには，模型と実物との間に於ける Φ_* と ψ_* の値は夫々等しくなければならない。もし Φ_* の値が各種の混合砂に対して同値であるならば，模型と実物との間の混合砂の粒度分布曲線が相似性を保つこととなる。同様に，ψ_* の値も模型の歪みに依って変ることがない様にする必要がある。$K_s/\delta > 6$ の場合，$Y_r=1$ そして $x'=1.03$ 一定であるから $(K_s/X)_r = 1$ となる。（suffix r は実物量と模型量との比を表わす）。さらに，自然河川の構成材料の equivalent roughness K_s は d_{65} に依って代表しうるから，$\theta_r=1$ となると同時に粒径の比較的均一で且つ大きいものに対しては $\xi=1$ となる。$K_s/\delta < 6$ の場合，

$$(K_s/\delta)_r = (K_sU_*/\nu)_r = 1 \quad \text{.....(6)}$$

の條件が必要とされる。もし(6)式が満足され，そして $X_r = Y_r = \theta_r = K_{sr} = \delta_r = 1$ を満足すると $\xi_r=1$ となる。これ等の評價から均一砂粒に対して次の式を得る：

$$\Phi_* = (q_B/U_*^3)\left(\frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right)^{3/2} \quad \text{................(7)}$$

$$\psi_* = \left(\frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right)f(\delta/K_s) = f\left(Re_*,\ \frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right) \quad \text{...(8)}$$

(7)と(8)を(3)に代入し整理すると

$$q_B = \rho U_*^3\, f\left(Re_*,\ \frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right)$$

になり，次元解析から求めた式と全く同型である。(2)式も Kalinske-Brown の式から変形してきた式，即ち，

$$q_B = (\sigma-\rho)U_*^3\, f\left(\frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right) \quad \text{...........(9)}$$

は Re_* と $(\sigma-\rho)$ の項を除いて同型である。これは小さい粒径の條件と粘性の効果を省略して本式を誘導したことに帰する。

次に濃度分布の基礎方程式から誘導した Rouse の式：$c/c_a = \exp\left\{\frac{h-z}{z}\ \frac{a}{h-a}\right\}^{Z}$ ......(10)

に対して考察しよう。濃度分布の相似性を保つためには(10)式の中の $Z_r = (w_0/kU_*)_r = 1$ ......(11)

にすれば良い。ここに k : Kārman's universal constant, w_0：砂粒の沈降速度。勿論誘導過程の中に含まれている kinematic eddy vicosity ε の相似性を満たすことは難しいが Lane -Kalinske に依るとその平均値 $\varepsilon_m = hU_*/15$ の仮定を用いると $Z_r = 1$ を満足することに依り，第一近似として $\varepsilon_r = 1$ が満足されることになる。従って，浮遊砂を支配する因子として $w_{0r} = 1$ の条件を取れば良い。w_0 は一般に下の様に書ける：

$$w_0 = \left[(g/A\nu^{2-n})\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right)d^{3-n}\right]^{1/n} \quad ....(12)$$

ここに n と A は Reynolds 数の関数 (n = 1 for laminar region; n = 2 for turburent region; and 1<n<2 for transition) n = 1 の場合，$(11)_r = 1$ と $(12)_r = 1$ から $(5)_r = 1$ を得る；n = 2 の場合，$(11)_r = 1$ と $(12)_r = 1$ から $(4)_r \cdot (5)_r = 1$ を得る；$1 < n < 2$ の場合，$(11)_r = 1$ と $(12)_r = 1$ から $(4)_r^{1/n}(5)_r^{(2-n)/n} = 1$ の関係を得る。もし模型縮尺が $(K_s U_*/\nu)_r = 1$ を満足するならば $Z_r = 1$ から $w_0 d_r = 1$ と $A_r = 1$ を得る。上記の考察から判る様に浮遊砂の相似条件は一応 bed load の条件の中に含まれることになる。

total load の相似条件：一般に Einstein の total load と bed load の関係式，

$$(i_T q_T / i_B q_B) = 1 + PI_1 + I_2 \quad .... (13)$$

の相似性を満足することは難しい。何故ならば P, I_1 と I_2 は Z と a/h の関数であるから，直接に縮尺を積の型で書くことができない。しかし Einstein の方法を用いて近似的に各流量に対して補助計算に依って求めることができる。即ち，$i_T q_T / i_B q_B = B_1$ ....(14)。ここに B_1 は total load と bed load の比を表わす。輸送砂量に付随する条件として砂粒の挙動，河床の形状と底層流の特性等がある。これ等の条件をも満足しなければならない。

a. 砂粒の始動条件は(2)式に $\xi_B = 0$ と置けば求まる。即ち $f\left(Re_*, \frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right) = 0$ ....(15)

$$f\left(\frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right) = 0 \quad ....(16)$$

(砂粒の Reynolds 数を無視した場合)

上記の式は Shields が提案した限界掃流力の無次元表示と同型に書き直すことができる。

b. 河床の形状：Liu と Simons 等の河床の régime の分類に用いられた U_*/w_0 の項は Re_* と $\frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*$ の関数で表わされる。同様に Bogardi に依って提案された $\beta_1 d^N = 1/Fr_*$ の式も下の式の様に変形することができる。

$$f(Re_*) = 1/\left(\frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right) \qquad (\beta_1 : \text{parameter})$$

c. 床面付近の流速分布と境界層の厚さ δ も次元解析に依って下の式で表示できる.

$$\delta = f\left(Re_*, \frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right) \quad ....(17)$$

$$U/U_* = f\left(Re_*, \frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*, h/d\right) \quad ....(18)$$

上の2式は $\left(\frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right)$ の項を除いては一般に表示されている式と同型である。

d. 砂粒に作用する力も Shields に依って提案された関係から $\frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_* = \Phi(Re_*)$ の関係が求まる。

上述の広範囲な考察に依り，輸送砂量の相似条件として下の式を得る。

$$\left[f\left(Re_*, \frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right)\right]_r = 1 \quad ....(19)$$

式(19)を満足するには夫々 $(Re_*)_r = 1$ と $\left(\frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right)_r = 1$ にすれば良いから

$$(Re_*)_r = U_{*r}\, d_r\, \rho_r\, \mu_r^{-1} = 1 \quad ....(20)$$

$$\left(\frac{\rho}{\sigma-\rho}Fr_*\right)_r = U_*^2\, g_r^{-1}\, d_r^{-1}\, \rho_r\, (\sigma-\rho)_r^{-1} = 1 \quad ...(21)$$

が得られる。もし(20)と(21)式の相似条件が満足されたとしたら(2)式から bed load の相似条件が得られる。即ち

$$q_{Br} = \rho_r^{-1}\, g_r^{-3/2}\, Ie_r^{-3/2}\, R_r^{-3/2} \quad ..... (22)$$

以上の(14)，(20)，(21)と(22)式と前述した其の他の6つの条件から移動床の模型縮尺を求めることができる。

最後に本研究にあたり終始懇切な御指導を賜った室田 明 教授に感謝の意を表します。