II-42 礫河川の河床材料調査について（オ2報）

名古屋大学 正員 足立昭平

本報告は，河床材料調査を積極的に砂礫輸送に関する流水特性の解明に役立てるために，河床砂礫の粒度組成を確率論的に意味づけようとする試みのオ２報である．

1. 粒度組成の確率論的基礎方程式

河床面上の砂礫は，流路の境界条件に関与するものであるから，その粒度組成は流水あるいは流砂に関する諸方程式を構成する因子の一つでなければならない。すなわち，粒径 d_i の砂礫個数を n_i であらわし，流路の形状，流水あるいは流砂を記述するその他の諸因子を一括して θ_j とおいて，

$$F_j(n_i, d_i, \theta_j) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, k. \qquad \cdots\cdots(1)$$

と書きあらわせるはずである。これらの方程式は河床砂礫の粒度組成を束縛する水理学的条件式であって，もし方程式の数 k が砂粒粒径の種類 m に等しいだけあれば，各粒径の粒子個数 n_i は少なくとも原理的には決定論的に確定できる．しかし，もし $k < m$ であれば，n_i の有意な値は確率論的に議論されねばならない．ここでは，後者の立場から，オ１報に提案した手法によって，まずその確率論的な基礎方程式の組み立てを試みる．考察の出発点は，個々の粒子の配列の組合せが，(1)を満足するかぎり，すべて確率的に同等であると仮定することにある．この仮説が成立するならば，その配列の組合せの数 f が最大であるような粒度組成が求めるものである。すなわち，

$$df = 0, \quad ここに \quad f = N!/n_1!\,n_2!\cdots\cdots n_m!, \quad N = \sum_{i=1}^{m} n_i \qquad (2)$$

あるいは，f の対数をとって，

$$d(\ln f) = \sum_{i=1}^{m} \ln\left\{\frac{N}{n_i}\exp\left(\frac{1}{2N} - \frac{1}{2n_i}\right)\right\} dn_i = 0 \qquad (3)$$

である。一方，n_i は(1)式に束縛されるから，(1)式を変形して，n_i および d_i を含む項 $\varphi_j(n_i, d_i)$ と，含まない項 $\psi_j(\theta)$ とに分けて，

$$\varphi_j(n_i, d_i) = \psi_j(\theta) \quad とあらわすとき， \quad d\varphi_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_i} dn_i = 0 \qquad (4)$$

を満足しなければならない。したがって，n_i に関する方程式としては，未定乗数 α_j を導入して

$$d(\ln f) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_i} = 0 \qquad (5)$$

を採用すればよい。これに(3)および(4)式を代入し，n_i を独立変数と見なしてることに注意すれば，n_i に関する確率論的基礎方程式は次式のように導かれる。

$$\frac{n_i}{N}\exp\left(\frac{1}{2n_i} - \frac{1}{2N}\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_i}\right) \qquad \cdots(6)$$

2. 河床砂礫がすべて掃流限界にある場合の解

河床面上の個々の砂礫について，その形態を分類すれば，(a) 掃流物質として流下し，その地点で止った粒子，(b) 浮流物質として流下し，その地点で沈降した粒子，(c) その地点に在来し，河床洗掘あるいは河岸浸蝕によって，河床面に露頭した粒子の三つに分けることができよう。もちろんこのような分類は，河川流量の変動によって変化するものであるが，まず手始めとして，河床砂礫のすべてが (a) の形態に属し，その地点における流水の掃流力に対して平衡状態にある場合を想定しよう。砂礫の限界掃流力 τ_c として，岩垣公式を引用すれば，比較的に大きい均一粒子に対して，

$$\tau_c/\rho = \mu d\,,\quad ここに\quad \mu = 0.05\, g\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right) \qquad \cdots\cdots (7)$$

ここに，ρ は水の密度，g は重力の加速度，σ は砂粒の密度である。抵抗の線型性を仮定した Einstein の手法をまねて，各粒度の限界掃流力の總和がその地点における流水の掃流力に等しいと仮定すれば，この場合の砂礫粒度組成に関する水理学的条件式 (1) は，

$$U_*^2 - \sum_{i=1}^{m}\frac{n_i}{N}\mu d_i = 0\,,\quad ここに\quad U_*^2 = \tau/\rho \qquad \cdots\cdots (8)$$

となり，(4) は $\phi = n_i d_i/N$，$\psi = U_*^2/\mu$ となる。したがって，確率論的条件式は，

$$\frac{n_i}{N}\exp\left\{\frac{1}{2N}\left(\frac{N}{n_i}-1\right)\right\} = \exp\left\{-\frac{\alpha}{N}\left(d_i - \frac{U_*^2}{\mu}\right)\right\} \qquad \cdots\cdots (9)$$

である。これらの方程式を，粒径 d_i が連続的に変化する場合にまで拡張すれば，粒径 d_i は長さの元をもつある常数 D を導入して，連続変数 x に，また粒子個数 n_i の總個数 N に対する比は，粒度個数の分布関数 $y(x)$ におきかえられる。すなわち (8) 式は，

$$\int_0^\infty y(x)\,x\,dx = \frac{U_*^2}{\mu D}\,,\quad ここに\quad d_i = x\cdot D\,,\quad \frac{n_i}{N} = y(x) \qquad \cdots\cdots (10)$$

また (9) 式は，$N\to\infty$ に対して，

$$y(x) = \exp\left\{-\frac{\alpha}{N}D\left(x - \frac{U_*^2}{\mu D}\right)\right\} \qquad \cdots\cdots (11)$$

(11) 式を (10) 式に代入して積分を遂行し，さらに $\int_0^\infty y\,dx = 1$ に着目すれば，常数 $\frac{\alpha}{N}$，D は

$$\frac{\alpha}{N} = \frac{\mu}{U_*^2}\,,\quad D = e\,\frac{U_*^2}{\mu} = 54.4\,U_*^2/g\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right) \qquad \cdots\cdots (12)$$

となる。したがって，この場合における粒度組成は次のように与えられる。

$$y(x) = e^{-ex+1}\,,\quad \int_0^x y(x)\,dx = 1 - e^{-ex}\,,\quad 平均径\ d_N = e^{-1}\cdot D \qquad \cdots\cdots (13)$$

上式は個数比による表現であるが，粒子形状を一様と見なして，慣用の重量比を用いれば，

$$重量比分布関数\ w(x) = \frac{1}{6}x^3 e^{-ex-2}\,,\quad 重量比平均径\ d_M = 4e^{-1}D\ である \qquad \cdots\cdots (14)$$

以上は思考上の平衡状態に関するものではあるが，粒度組成と流水特性との関係式としての一提案である。なお本研究は文部省科学研究費（特定）によった。ここに付記して謝意を表する次第である。