

II-81 開水路弯曲流の水理学的特性に関する研究(その6)

— 単一弯曲流の内部機構 —

京大防災研究所 正員 ○村本嘉雄

建設省近畿地建 正員 井上喬之

1. はしがき 従来、開水路弯曲流の内部機構を解析するのには主として主法は層流理論による方法と三次元境界層理論による方法に大別される。しかし、これらの解析法は通常、流れ方向に一樣な場合の解析が難しく、二次流の発生、発達過程における弯曲流の挙動を論ずることができない。一方、これまでに、主法は深さの比に中々、開水路弯曲流の定量的検討による、極く壁面近傍を除いて粘性抵抗の影響は慣性力に比べて極めて小さく、流動粘性係数で補正した層流理論も有効と考えられる。また、弯曲部流入直後は、通常、底面の境界層は完全に発達し、水面に達している場合が多く、二次流は発生初期のまゝ、下層同程度の大きさである。この境界層の二重現象把握が難しい。したがって、名中の開水路弯曲流は Thompson の概念から推察されるように、弯曲部直後二次流が発生する前提として主流の鉛直方向の速度の分配が必要であるが、発生、発達過程では粘性抵抗より慣性力が主役をなすと考えられる。

本報告では、こうした考えを検討するために二種の単一弯曲部における流速、流向測定値から三次元速度成分の流れ方向の变化を求め、それに基づいて二次流の発生域、発達域、完全発達域(一樣域)を定義し、各領域の特性を明らかにする。さらに、発生域について速度係数則による考察と比較検討するとともに、既報(その2, その4)で述べた一樣域について再検討する。

2. 速度の変化と領域区分 実験に用いた水路は長方形断面のコンクリート製水路(概 ≈ 0.13)でその平面形状および寸法を図1に示す。主流の流速測定は中7mmの Prandtl 型ピトー管で行い、二次流の流速は中10mmの改良型球型ピトー管による流向測定から決定した。水理条件は $R_c = 75\text{ cm}$, 150 cm の場合とし $Q = 10\text{ l/sec}$, 最大 Fr 数 0.57 であり、弯曲部に乱流域の存在しない流れである。

速度の計算は弯曲部直後30°間隔の各測定点壁面および水面付近の測定不確定率(箇所)に除外し、全断面(巾25cm, 水深15cm)のうち $10 \sim 15\text{ cm}$, $z = 28 \sim 29\text{ cm}$ の長方形断面で行う。弯曲部直後の (θ, r, z) 方向の速度成分 $U = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}$, $V = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}$, $W = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (ur)}{\partial \theta}$ と流速測定値より計算値を求め図末を示し、 $R_c = 75, 150\text{ cm}$ の場合についてそれぞれ図2, 図3のようになる。各速度成分の流れ方向の变化は二重スで若干の程度差はあるが、主として長直と流向が一致する。

(i) z は上流方向をとり、流入直より次第に増大し、 $\theta = 60^\circ$ で最大となり、減少する。

(ii) r は外岸方向をとり、 $\theta = 30^\circ$ で直線部と同じ値をとり、以下、次第に減少する。

(iii) z は鉛直下方向をとり、 $\theta = 30^\circ \sim 60^\circ$ (付近)で0となり、以下、次第に発達し一定値に近づく。

以上の特性は一定例であるがこれを基として開水路弯曲部の壁面近傍と除く断面内の水流

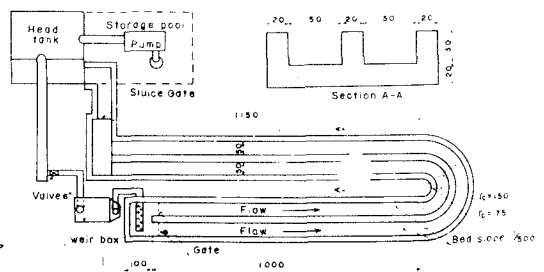


図1 実験水路 (cm単位)

の内部機構に關する一般的事性を把握せざるを得ない。いま、
 図2、図3に於ける各温度成分の特性を単純化して表示すると、
 図4-(a) のようになる、それを概念的に示すと図4-(b) のように
 表わされる。従つて、彎曲部の流れは図4-(a) に示すような温度
 の変化によつて I; 二次元回転領域、II; 三次元回転領域、III;
 一次元回転領域の三つの領域に分けられることが出来る。一方、これ
 らを二次流の発達過程から考へて、I; 発生域、II; 発達域、
 III; 完全発達域(一様域)と名付け、その特性を述べると以下
 のようになる。

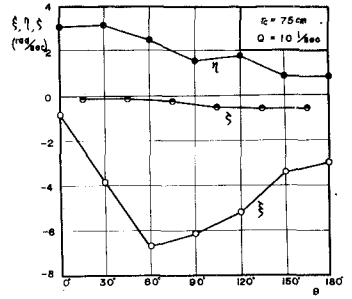


図2 温度の変化

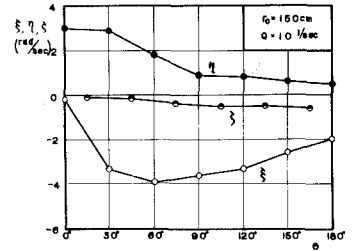
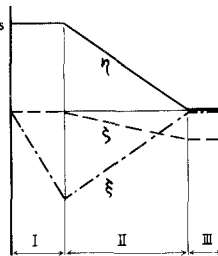


図3 温度の変化

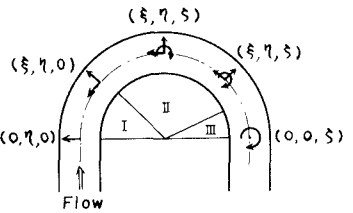
(I) 発生域は $\eta \approx \eta_s$ (直線流の温度), $z \approx 0$ であるから、
 上流直線部の温度が二次元 (0, r) の Potential 流れによつて変
 化し、二次流の発生する領域と考へられる。

(II) 発達域は二次流の影響が主流に及んで η の減少、 z の発生
 を招くと同時に主流の温度が二次流の影響により減少する相互干
 渉の变化領域と考へられる。

(III) 一様域は主流は二次流の相互干渉が η_s
 一様化し、壁面近傍を除く η , z は定常
 化しており、 z は定常化している。したがつて、2つの領域には非粘性回転
 流といふ上流部とせん断応力の支配的な
 下流部に分離し、三次元境界層理論によ
 り解析が近似的に適用できると考へられる。



(a)



(b)

図4 温度変化の模型図と領域区分

3. 発生域に關する検討 前項に述べた特性から発生域においては温度係数 η の近似的に適用
 できると考へられる。流線に沿う温度の变化的に圖1は η の Squire & Winter¹⁾ および Hawthorne²⁾ によ
 り、彎曲部の二次流に關連して一般的事性を取り扱つたものと見られる。ここには、円筒座標系を用いて近
 似的な取り扱ひをする。流線ベクトル u , 温度ベクトル w とすると座標系における Helmholtz の温度
 係数 η は

$$\text{rot}(u \times w) = (w \cdot \nabla) u - (u \cdot \nabla) w = 0 \quad (1)$$

と表わされ、円筒座標系を用いて流れ方向 (0) の成分に關する式は

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \theta} + r\eta \frac{\partial}{\partial r} + r\xi \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{u}{r} - \left(u \frac{\partial}{\partial \theta} + r\eta \frac{\partial}{\partial r} + r\xi \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\xi}{r} = 0 \quad (2)$$

となる。いま、前項の取り扱ひに準じて壁面近傍を除いた流線断面内で単一流度の流れ方向の変化を
 考へるとすると、 $\partial \xi / \partial z = 0$, $\partial \xi / \partial r = 0$ である、また、発生域の特性より $z = 0$ と考へられる。
 したがつて、(2) 式はつぎのように表わされる。

$$u \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\xi}{r} \right) - \xi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{r} \right) = r\eta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \quad \text{or} \quad u \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\xi}{u} \right) = r\eta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \quad (3)$$

上式より ξ を求めるには、彎曲部の境界条件を考慮した Potential 流の u 分布と与之合わせなければならないが、一般的に函数表を用いて主として ξ の値、並に θ に

$$Ur = \text{const} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

・自由端 $\xi = 0$ の分布と考へる。さらに、前報の特性より $\eta = \eta_0$ とし、彎曲部流入点の条件 $\theta = 0$ 、 $\xi = \xi_0$ とすると、(3) 式は

$$\xi = \xi_0 - \eta_0 \theta \quad (5)$$

となる。すなわち、流入直線部で速度が 0 となる場合、 ξ は θ に比例し、直線部に増加するといふのである。

以上の考察結果と前報の ξ の実験値とを比較すると、 $r_c = 75, 150 \text{ cm}$ の場合についてそれぞれ図 5、図 6 のようになる。これらの図で (3) 式の曲線は $u(r, \theta, \xi)$ の実験値を用いて数値計算から求めた $\xi(\theta)$ と表わし、(3)' 式の曲線は (3) 式で $\eta = \eta_0$ とし、 $u(r, \theta)$ の実験値より求めたものである。これらの図から明らかなように発生領域は (4) 式の仮定を用いた (5) 式によつて ξ の変化を表わすことが出来る。このため、発生域の特性はこうして近似的に取り扱ふによつて漸進的である。

4. 一様域内流の検討 図 4-(a) に示した一様域(Ⅳ)は理想の形状であるが、通常、水路彎曲流は図 2、図 3 に示すように彎曲部流出点付近でも発生域がある。これは一様域の過渡領域にある場合が多いと考へられる。このように過渡域の特性は発生域の挙動が解明される限り把握できないが、ここでは既報で述べた一様域上部部の取り扱いの適合性について検討してみる。

基礎式として、流れ方向の速度を無視し、二次流成分として半径方向の流速のみを考慮した運動方程式 (Euler eq) より連続式、

$$\frac{V}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Ur) = 2g \quad (6) \quad V \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{U^2}{r} = mg - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (7) \quad 0 = g\eta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (8) \quad \text{および} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) = 0 \quad (9)$$

を用いる。ここで、 l, m, n はそれぞれ r, θ, ξ 方向の重力の方向余弦である。既報の取り扱いで、 $l=1, m=0, n=-1$ としたとき、 $\xi=0, \eta=0, \xi=-\frac{1}{V} \sim -r$ と考へたが、本実験水路のように横断面上で $\theta=0$ の流入、流出直線部に接する彎曲部では、水路中心 $r=r_c$ における θ 方向の路床の勾配を基準として、 $l = \frac{r_c}{r} \cos \theta, m=0, n = -\sqrt{1 - (\frac{r_c}{r} \cos \theta)^2}$ とする必要がある。この場合、過渡域では $\xi=0, \eta=0, \xi = -\frac{r_c}{rV} \cos \theta \sim \text{const} (<0)$ となる。いま、過渡域の範囲 $(\frac{r_c}{r} \cos \theta)^2 \ll 1$ とすると $n \approx -1$ とすると、(6) ~ (9) 式から流速、水面高の式が導き出される。

$$V = \frac{C_1}{r} \quad (10) \quad U = \frac{g l r_c}{2 C_1} r + \frac{C_2}{r} \quad (11) \quad h = -\frac{C_1^2 + C_2^2}{2g} \frac{1}{r^2} + \frac{g l r_c^2}{8 C_1^2} r^2 + \frac{C_2 l r_c}{C_1} \ln r + C_3 \quad (12)$$

ここで、 C_1, C_2, C_3 は積分定数であり、既報 (804) の仮定 $h_c = \bar{h}$ を用いると、 C_1 と C_2 の関係式

$$C_1 C_2 = -4g l r_c^3 \left\{ r_c^2 \left(r_c^2 - \frac{1}{4} \right) \right\} - K \pm \sqrt{K^2 + \frac{1}{192 r_c^2 (r_c^2 - 1/4)}} \quad (13)$$

$$\text{ただし、} \quad K = \ln \left\{ \frac{1}{r_c} \left(\frac{r_c' + \frac{1}{2}}{r_c' - \frac{1}{2}} \right)^{r_c'} \sqrt{r_c'^2 - \frac{1}{4}} \right\} - 1, \quad r_c' = \frac{r_c}{B}$$

といふことができる。(13) 式の根号は $C_1, C_2 \geq 0$ に対応するが、一様域に常に $U > 0, V > 0$ の条件を用いると、

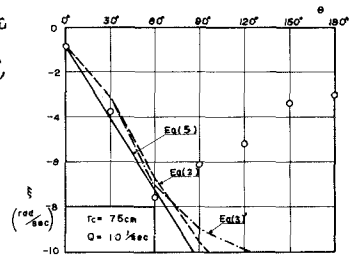


図 5 $\xi(\theta)$ の変化

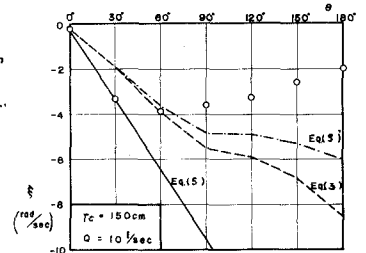


図 6 $\xi(\theta)$ の変化

上符号がこれを満足する。 $C_1, C_2 > 0$ の場合について、 U の変化を検討すると

$$\frac{dU}{dr} \geq 0 \quad ; \quad r' \geq \sqrt{8r_c^2(r_c^2 - \frac{1}{4})} \left\{ K + \sqrt{K^2 + \frac{1}{192r_c^2(r_c^2 - \frac{1}{4})}} \right\} \quad (14)$$

となる。 $\therefore$ 2で、 $r' = r/B$ $|r' - r_c| \leq \frac{1}{2}$ である。また、水面の曲率 $\frac{d^2h}{dr^2}$ は C_1, C_2 の符号に因縁して正である。(14) 式の関係を因縁すると図7のようになり、全域 $dU/dr > 0$ となる境界点は $r_c' \div 1.12$ である。一方、 U の分布形について、彎曲部後半 ($\theta = 90^\circ \sim 180^\circ$) の実験値と比較すると、 $r_c = 75, 150 \text{ cm}$ の場合についてそれぞれ図8, 図9のようになる。これらの図で理論曲線はつぎの各式を表わす。

(11) 式と (13) 式 (正符号) より求めた U 分布式

$$\frac{U}{U_c} = \frac{4r_c^2(r_c^2 - \frac{1}{4}) \left\{ K + \sqrt{K^2 + \frac{1}{192r_c^2(r_c^2 - \frac{1}{4})}} \right\} \frac{1}{r'} + \frac{r'}{2}}{4r_c^2(r_c^2 - \frac{1}{4}) \left\{ K + \sqrt{K^2 + \frac{1}{192r_c^2(r_c^2 - \frac{1}{4})}} \right\} + \frac{r_c'}{2}} \quad (15)$$

既報に誘導による U 分布式 (2の4, (10) 式)

$$\frac{U}{U_c} = \frac{r'^3 + r_c' \sqrt{(r_c'^2 + \frac{1}{40})(r_c'^2 - \frac{1}{4})}}{r'^3 + r_c' \sqrt{(r_c'^2 + \frac{1}{40})(r_c'^2 - \frac{1}{4})}} \frac{r_c'}{r'} \quad (16)$$

自由端における U 分布式

$$U/U_c = r_c'/r' \quad (17)$$

強制端における U 分布式

$$U/U_c = r'/r_c' \quad (18)$$

$r_c = 75 \text{ cm}$ の場合は $\theta = 180^\circ$ 近く、 $r_c = 150 \text{ cm}$ の場合では $\theta = 20^\circ \sim 180^\circ$ の側壁近傍を除いてほぼ一様域の分布式 (15) 式に近似できることを考へられる。また、本実験の流量範囲 $Q = 5 \sim 30 \text{ l/sec}$ では一様域の範囲がその分布形に差を認められず、 r_c 。

すなわち、(15) 式は r_c' の増加に伴って (18) 式に近くなり、 $\rightarrow$ (17) 式に一致する。また、(16) 式は $r_c' > 15$ として $r_c' = \frac{1}{2} (1 + \frac{r_c'}{r'})$ に近似できる。

5. 考察以上、単一彎曲部の内部機構は領域区分に基づき現象を説明した。境界条件および水理条件と各領域の存在性、流速域の特性、壁面近傍の特性を説明する。さらに、壁面近傍の解析は上述の方向と境界近傍の方向の相補的を考へる必要と認められる。

参考文献

- Squire & Winter : J. Aero. Sci. 18-4 (1951)
 Hawthorne : Proc. of Roy. Soc. of London A Vol. 206 (1951)
 村本 石田 : 東大防災研年報 7号 (1964)
 村本 井上 : " 8号 (1965)

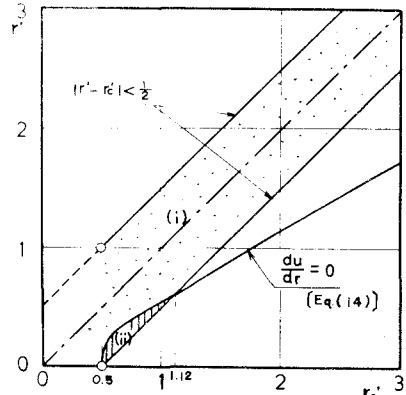


図7 U 分布の特性 (i) $\frac{dU}{dr} > 0$, (ii) $\frac{dU}{dr} < 0$

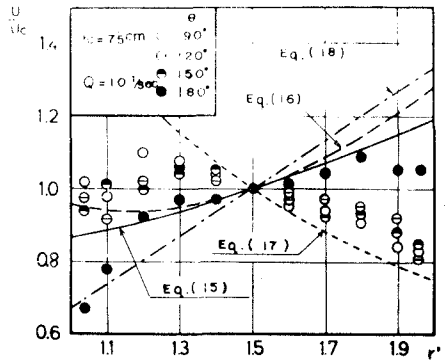


図8 U 分布式と実験値の比較 ($r_c' = 1.5$)

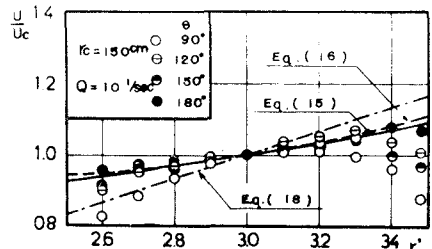


図9 U 分布式と実験値の比較 ($r_c' = 3$)