## II－30 開水路わん曲流の流況特性（第一報）

建設省土木研究所　正員　須賀尭三

開水路わん曲流の流速分布については，縦断変化がなくなったような断面のものが主として研究されてきたが，ここで取り扱うものは流速の縦断変化をも考慮する。オイラー・円筒座標表示式および連続方程式において，$\frac{\partial}{\partial t}=0$，$\frac{\partial}{\partial z}=0$，$W=0$ とし，半径方向およびそれに垂直方向の流速をそれぞれ $U=u(r,\theta)$，$V=V_0+v(r,\theta)$ と考えて微小項を省略すれば，

$$\frac{V_0}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{V_0^2}{r}-\frac{2vV_0}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r},\quad \frac{V_0}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{uV_0}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial\theta},\quad \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}=0 \quad \text{-------(1)}$$

となる。ここに，$V_0$ は便宜上わん曲始端付近の自由渦の仮定が成り立っている断面の水路中央の流速とする。これは流量，水位，水路横断形により定められる。(1)式より $P$ および $u$ を消去して，

$$r\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+3\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+2\frac{V}{r}-5C=0 \quad \text{-------(2)}$$

のような $V(r,\theta)$ に関する微分方程式を得る。$\theta$ に無関係な積分定数は $\frac{\partial}{\partial\theta}=0$ の状態の理論解から与えられ，よく知られている近似解 $V=rC$ を用いて定められたものである。このときの定数 $C$ は，$h$ を水深として，$C=Q\Big/\int_{R_i}^{R_o}hr\,dr$ によって与えられ，水路横断形状および水理量により定められる。(2)式は直接数値積分することも可能であろうし，あるいは $(V/V_0)=(r/R)^t$，$t=t(\theta)$ とおいて解く方法もあるが，（未発表）が，ここでは適当な変数変換を行って $V$ を多項式に展開表示し，得られた近似解について報告する。

変数 $r$ の代りに，水路中央からの距離の度合を表わす変数 $Y$ を考え，

$$\frac{r}{R}=\left(1+\frac{1}{\alpha}Y^{-1}\right)\qquad |Y|\geqq 2,\ \ \alpha=\frac{R}{B} \quad \text{-------(3)}$$

とする。$R$ は水路中央の半径（一定）である。$Y$ の値は水路中央で $\infty$，両側壁面で $\pm 2$ となる。(2)式を $Y$ について書き替えると，

$$(\alpha Y^4+Y^3)\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}+(2\alpha Y^3-Y^2)\frac{\partial V}{\partial Y}+\frac{2}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\alpha Y}\right)V-5BC+\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\alpha Y}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=0 \quad \text{------(4)}$$

となる。ただし，第3項および第5項において $\left(1+\frac{1}{\alpha Y}\right)^{-1}=1-\frac{1}{\alpha Y}+\frac{1}{(\alpha Y)^2}-\frac{1}{(\alpha Y)^3}+\cdots$ の第3項以下の微小量の省略がある。流速 $V$ に対して，

$$V=f_0+f_1Y^{-1}+f_2Y^{-2}+f_3Y^{-3}+\cdots+f_iY^{-i}+\cdots \qquad f_i=f_i(\theta) \quad \text{-------(5)}$$

とおいて(4)式を解くことを考える。この場合 $f_i\to 0$ となり，$f_iY^{-i}$ は急速にゼロに近づくのであるが，$f_i$ の $\theta$ に関する微分方程式は，

$$\left.\begin{aligned} f_0''+2f_0 &= 5\alpha BC-3\alpha f_1-2\alpha^2 f_2 \\ f_i''+2f_i &= \frac{1}{\alpha}\left(f_{i-1}''+2f_{i-1}\right)-(i+1)(i+3)\alpha f_{i+1}-(i+1)(i+2)\alpha^2 f_{i+2} \end{aligned}\right\} \quad \text{------(6)}$$

と表わされ，$f_i$ の式の中には $f_{i+1}$ および $f_{i+2}$ の項が入り，これはオーダーを考えるとこれらを無視することは困難である。しかし，$V$ については実際上あまり高次まで考える必要はないから，近似的に

きうた項でうち切り、うち切った影響があまり入ってこないような解を求める。ここでは、試みに $f_3$ までの解について計算してみた。解のかたちを検討した結果、$f_3$ について、

$$f_3 = a_3 \sin(\sqrt{2}\theta + b_3) \qquad \text{--------(7)}$$

と仮定すると、(4)式の解として、

$$f_2 = a_2 \sin(\sqrt{2}\theta + b_2) - a_1 \theta \cos(\sqrt{2}\theta + b_1) + \frac{5BC}{2\alpha} \qquad \text{------(8)}.$$

$$\begin{aligned} f_1 = &-\alpha^2 a_3 \sin(\sqrt{2}\theta + b_3) - \frac{10}{3}\alpha a_2 \sin(\sqrt{2}\theta + b_2) \\ &+ \frac{7\sqrt{2}}{9}\alpha a_1 \sin(\sqrt{2}\theta + b_1) + \frac{10}{3}\alpha a_1 \theta \cos(\sqrt{2}\theta + b_1) - \frac{85}{18}BC \end{aligned} \qquad \text{-------(9)}$$

$$\begin{aligned} f_0 = &-\frac{3}{8}\alpha^3 a_3 \sin(\sqrt{2}\theta + b_3) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\alpha^3 a_3 \theta \cos(\sqrt{2}\theta + b_3) \\ &+ \alpha^2 a_2 \sin(\sqrt{2}\theta + b_2) - 2\sqrt{2}\alpha^2 a_2 \theta \cos(\sqrt{2}\theta + b_2) \\ &- \frac{\sqrt{2}}{24}\alpha^2 a_1 \sin(\sqrt{2}\theta + b_1) + \frac{1}{6}\alpha^2 a_1 \theta \cos(\sqrt{2}\theta + b_1) - \sqrt{2}\alpha^2 a_1 \theta^2 \sin(\sqrt{2}\theta + b_1) \\ &+ a_0 \sin(\sqrt{2}\theta + b_0) + \frac{85}{12}\alpha BC \end{aligned} \qquad \text{-------(10)}$$

を得る。ここに、$a_i$ および $b_i$ は積分定数であって、それぞれわん曲の始端および末端条件により定められる。$\theta = 0$ では自由渦(横断方向のエネルギー一定、実験によると必ずしもわん曲の始端で自由渦とはならないから、逆に自由渦になる断面を $\theta = 0$ とする)の条件を与え、わん曲末端部 $\theta = \theta_c$ では下流直線部の方程式との接続条件を与える。この式は近似的にわん曲末端部に近い短かい区間を考え、オイラーの方程式および連続方程式において、(1)式と同様の操作を行って微小項を省略すれば、水路方向の流速 $V = F(x, y)$ に対して、

$$\Delta F(x, y) = 0 \qquad \text{--------(11)}$$

が得られる。したがって、末端部条件として二次微係数を等しいとおいて、

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\theta_c} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x=0} = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x=0} \qquad \therefore V_{\theta=\theta_c} = F_{x=0} = -\iint \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\theta_c} dy$$

によって諸定数は定められる。$1/r^2 \doteqdot (1/R^2)\{1 - 2/(\alpha r) + 3/(\alpha r)^2\}$ の近似式を用いた場合、諸定数は、

$$a_3 \sin b_3 = -\frac{V_0}{\alpha^3} \qquad a_3 \sin(\sqrt{2}\theta_c + b_3) = -\frac{35}{564}\frac{BC}{\alpha^2}$$

$$a_1 \sin b_1 = \frac{12}{7\sqrt{2}}\frac{V_0}{\alpha^2} - \frac{13 \times 5}{14\sqrt{2}}\frac{BC}{\alpha} \qquad a_1 \sin(\sqrt{2}\theta_c + b_1) = -\frac{50\sqrt{2}}{47}\frac{BC}{\alpha}$$

$$a_2 \sin b_2 = \frac{V_0}{\alpha^2} - \frac{5BC}{2\alpha} \qquad a_2 \sin(\sqrt{2}\theta_c + b_2) = -\frac{5 \times 571}{24 \times 47}\frac{BC}{\alpha} + \theta_c a_1 \cos(\sqrt{2}\theta_c + b_1)$$

$$a_0 \sin b_0 = \frac{25}{56}V_0 - \frac{5 \times 107}{112}\alpha BC$$

$$\begin{aligned} a_0 \sin(\sqrt{2}\theta_c + b_0) = &-5\left(1.06 + \frac{20}{47}\theta_c^2\right)\alpha BC \\ &+ \alpha^2\theta_c\left\{-\frac{7}{6}a_1 \cos(\sqrt{2}\theta_c + b_1) + 2\sqrt{2}a_2 \cos(\sqrt{2}\theta_c + b_2) + \frac{3\sqrt{2}}{4}\alpha a_3 \cos(\sqrt{2}\theta_c + b_3)\right\} \end{aligned}$$

の各式から、

$$a_3 = \left[\frac{1}{\sin^2\sqrt{2}\theta_c}\left(\frac{V_0^2}{\alpha^6} - \frac{35}{287}\cos\sqrt{2}\theta_c \frac{BCV_0}{\alpha^5} + \frac{7^2 \times 5^2}{564^2}\frac{B^2C^2}{\alpha^4}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \sin b_3 = -\frac{V_0}{\alpha^3}\frac{1}{a}$$

$$\cos b_3 = \frac{1}{\sin\sqrt{2}\theta_c}\left(\cos\sqrt{2}\theta_c \frac{V_0}{\alpha^3} - \frac{35}{564}\frac{BC}{\alpha^2}\right)\frac{1}{a}$$

(以下省略)のように定められる。$\sqrt{2}\theta_c = \pi$ 付近で係数が不安定になる原因は今後検討の予定である。

この理論と実験値との比較、摩擦や鉛直方向の流れの影響等あるいは適用範囲に関する実験的検討および諸特性については別途報告の予定である。