

II-23 河川における非定常流の数値解法

北海道大学工学部 正員 工博の岸 力

北海道大学工学部 学生員 平山健一

1 基礎方程式と特性曲線表示

洪水追跡計算における運動の方程式は水位 η と流量 Q を変数とすれば(1)式で与えられる。

$$\frac{1}{gA} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \right] = - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{n^2 Q^2}{A^3 R^{4/3}} + \frac{g w \cos \theta}{gA} \quad (1)$$

ここに A : 断面積 Q : 流量 η : 水位 n : 粗度係数 R : 径深

g : 河道に沿う単位長さ当たりの横流入量(流入のとき+, 流出のとき-)

w : 横流入の流速 θ : 横流入の流向が x 軸の正の向きとなす角度

一方、連続の式は (2) 式で与えられる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = g \quad (2)$$

一階連立偏微分方程式に関する特性帯の理論によれば(1)および(2)式は 次の連立常微分方程式に帰着される。

$$dt = dx / \Phi \quad (3)$$

$$d\eta - \frac{dQ}{B\psi} = \frac{dx}{\Phi\psi} \left\{ \omega^2 (i_f - i_{g1}) - \frac{Q^2}{A^2} (i_0 + i_*) \right\} \quad (4)$$

$$dt = dx / \psi \quad (5)$$

$$d\eta - \frac{dQ}{B\Phi} = \frac{dx}{\Phi\psi} \left\{ \omega^2 (i_f - i_{g2}) - \frac{Q^2}{A^2} (i_0 + i_*) \right\} \quad (6)$$

ここに $\Phi = (Q/A) + \omega$, $\psi = (Q/A) - \omega$, $\omega = \sqrt{gA/B}$, B : 水面巾, i_0 : 河床勾配

i_* : $\partial A / \partial x = B(\partial h / \partial x + i_*)$ で定義される量で、長方形断面水路では $i_* = (h/B)(\partial B / \partial x)$

$i_f = n^2 Q^2 / A^3 R^{4/3}$, $i_{g1} = (g w \cos \theta - g \psi) / gA$, $i_{g2} = (g w \cos \theta - g \Phi) / gA$

3~6 式において横流入量 g は主な支流川を別に取扱うものとすれば一般に無視しうる程度の量となる。又、一樣矩形断面水路を考えると i_* は、0 とおけるので 3~6 式は次のようになる。

$$dt = dx / \Phi \quad ; \quad d\eta - \frac{dQ}{B\psi} = \frac{dx}{\Phi\psi} \left\{ \omega^2 i_f - \frac{Q^2}{A^2} i_0 \right\} \quad (7)$$

$$dt = dx / \psi \quad ; \quad d\eta - \frac{dQ}{B\Phi} = \frac{dx}{\Phi\psi} \left\{ \omega^2 i_f - \frac{Q^2}{A^2} i_0 \right\} \quad (8)$$

(7)~(8) 式が (1), (2) 式と同等であることは、全微分の関係を用いて容易に確かめることができる。

2 特性曲線による数値計算法

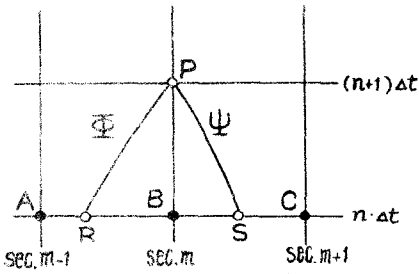


Fig. 1

Fig-1のようにx-t平面を直交格子で分割し、その上で数値計算を行うことを考える。時刻 $n\Delta t$ のときのA,B,C点における水位 η 、流量 Q を知って時刻 $(n+1)\Delta t$ のときのP点の水位、流量を求める方法を次に示す。

まずP点を通る特性曲線系， ω を軸と $t=nt_0$ の格子線との交点をそれぞれR，Sとする。PR上では(7)式の関係が成立するが，この式は右辺にも未知量を含んでいるから，このままでは解を得る事はできない。そこで(8)式のように近似する。

$$(B\Psi)_B(\eta_F - \eta_S) - (Q_P - Q_R) = \frac{1}{Z} \left\{ \text{got } n^2 \left(\frac{A_R Q_R^2}{D_R} + \frac{A_P Q_P^2}{D_P} \right) - \left(\frac{Q_R^2}{A_R^2} + \frac{Q_P^2}{A_P^2} \right) \right\} \quad (10)$$

$$K K' L \quad D = A^2 R^{4/3}, R = A/B$$

同様に(8)式は

$$(B\Phi)_B(\eta_p - \eta_B) - (Q_p - Q_B) = \frac{1}{2} \left\{ g \Delta t n^2 \left(\frac{A_S Q_S^2}{D_S} + \frac{A_P Q_P^2}{D_P} \right) - \left(\frac{Q_S^2}{A_S^2} + \frac{Q_P^2}{A_P^2} \right) \text{LBM} \right\} \quad (10)$$

式より Q_0 を消去して、 η_0 を求めると

$$L = \left[(B\psi)_B \eta_R - (B\Phi)_B \eta_S - Q_R + Q_S + \frac{1}{2} g \Delta t n^2 \left(\frac{A_R Q_R^2}{D_R} - \frac{A_S Q_S^2}{D_S} \right) - \frac{\Delta t Q_R^2}{A_R^2} \omega_B + \frac{\Delta t Q_S^2}{A_S^2} \omega_B \right] / \left[(B\psi)_B (B\Phi)_B \right] \quad (11)$$

また同様に、 S に於ける諸量を含んでいるが A, B, C より比例配分を求める。 φ_p と使って

$$Q_0 = Q_0 + (BQ_0)(n_0 - n_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_p Q_p^2}{D_p} + \frac{A_p Q_p^2}{D_p} \right) + \left(\frac{Q_p^2}{A_p^2} + \frac{Q_p^2}{A_p^2} \right) \epsilon_0 B \Delta t \quad (12)$$

式(2)の解を用い、 ϕ_p を定める。半計算方法は安定条件は明確であるが計算上略さず粗となる。

2 解法による数値計算法

したがって、計算に必要となるための数値は、東西特異曲線に囲まれる領域(図2)内の値を求め、これを式(1)に代入し、これを、式(4)式(5)の差分方程式に変換する際、 ΔPRS 内の値を用いて次の近似式が得られる。

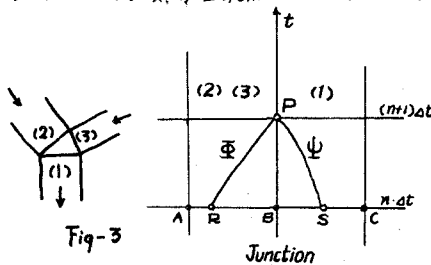
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \eta_s \dot{\theta}_s^2 + \frac{1}{2} \eta_s \dot{\theta}_s^2 + \frac{1}{2} \eta_s \dot{\theta}_s^2 \right) = \left(\frac{G_s}{4\pi} \right) \eta_s - \eta_s \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{G_s}{4\pi} \right) \eta_s - \eta_s \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{G_s}{4\pi} \right) \eta_s - \eta_s \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

「このように、我々の研究は、**環境と健康の因果関係**を明らかにすることを目的として行われている。その結果、**環境要因が健康に与える影響**が明らかになり、**公衆衛生政策の改善**に貢献することが期待される。」

Stokerによれば格子間隔 Δt 、 ΔX はP点を通る重力特性曲線が、各々隣接格子線と横切らぬように定めることをあげているが、本方法を用いて $\Delta T=120\text{sec}$ 、 $\Delta X=2000\text{m}$ で同じ計算を行ってTab 1のような結果を得たが、階差法を使用する場合Stokerの指摘する条件が充分なものであるとすることには疑問がある。なお6.に示す数値計算例では主として本方式を採用した。

		(上流端)					Table-1					(下流端)
		NO. 1	NO. 2	NO. 3	NO. 4	NO. 5	NO. 6	NO. 7	NO. 8	NO. 9	NO. 10	
$\lambda_0 = 0.000476$	Stoker's 条件	流量	300 ^{kg}	306	310	322	335	352	376	402	439	473
$\eta = 0.0272$		水速	1.20 ^m	1.21	1.24	1.27	1.31	1.37	1.43	1.53	1.65	1.80
	階差法	流量	300 ^{kg}	300	300	300	300	300	300	300	300	300
		水速	1.19 ^m	1.19	1.19	1.19	1.19	1.22	1.22	1.28	1.47	1.80

分合流点における計算には(77)(88)式で示される連続の条件が分合流点を形成する断面で成立することが必要である。又、分合流点における $x-t$ 平面は Fig. 7 で与えられる。



$$Q_{P1} = Q_{F2} + Q_{P3} \quad (18)$$

3. に述べた方法を分合流点に適用することは困難であるので、分合流点に於ける計算法は特性曲線表示の式を用いるのが、明瞭で利用度がなかい方法といえる。

断面(2)(3)には重特性曲線に沿った。断面(1)には重特

性曲線に沿った階差式を考え、式と連立させてとくと η_p のよい近似値として次式を得る。

$$\begin{aligned} \gamma_{P10} = & -(\gamma_{S1} - \gamma_{B1})X(B\Phi\psi)_{B1}S_1 + (\gamma_{R2} - \gamma_{B2})X(B\Phi\psi)_{B2}S_2 + (\gamma_{R3} - \gamma_{B3})X(B\Phi\psi)_{B3}S_3 + (B\Phi)_{B1}\gamma_{B1} - (B\psi)_{B2}\gamma_{B2} - (B\psi)_{B3}\gamma_{B3} \\ & + (Q_{S1} - Q_{B1})\psi_{B1}S_1 - (Q_{B2} - Q_{R2})\bar{\psi}_{B2}S_2 - (Q_{B3} - Q_{R3})\bar{\psi}_{R3}S_3 + G_1 - G_2 - G_3 / \{ (B\Phi)_{B1} - (B\psi)_{B2} - (B\psi)_{B3} \} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{値} \quad G_1 = \left[gA \frac{n^2 Q}{A^2 R^{\frac{2}{3}}} - B \frac{Q^2}{A^2} i_0 \right]_{B1} \Delta t \quad G_2 = \left[gA \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{\frac{2}{3}}} - B \frac{Q^2}{A^2} i_0 \right]_{B2} \Delta t \quad G_3 = \left[gA \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{\frac{2}{3}}} - B \frac{Q^2}{A^2} i_0 \right]_{B3} \Delta t$$

次に Q_{p1} , Q_{p2} , Q_{p3} は次式で σ の近似値が与えられる。

$$Q_{p|0} = Q_{B|} + (\eta_{S|} - \eta_{B|})(B\Phi\Psi)_{B|} S_1 + (B\Phi)_{B|}(\eta_{P|} - \eta_{B|}) - (Q_{S|} - Q_{B|})(\Psi)_{B|} S_1 - G_1 \quad (20)$$

$$Q_{p20} = Q_{B2} + (\gamma_{B2} - \gamma_{R2})(B\Phi\Psi)_{B2} S_2 + (B\Psi)_{B2} (\gamma_{P2} - \gamma_{B2}) - (Q_{B2} - Q_{P2})(\Phi)_{B2} S_2 - G_2 \quad (2)$$

$$Q_{P30} = Q_{B3} + (\gamma_{B3} - \gamma_{R3})(B\Phi\Psi)_{B3} S_3 + (B\Psi)_{B3} (\gamma_{P3} - \gamma_{B3}) - (Q_{B3} - Q_{R3})(\bar{\Phi})_{B3} S_3 - G_3 \quad (22)$$

第一近似値は

$$Q'_{p10} = 0.5 \times (Q_{p10} + Q_{p11})$$

$$Q'_{p20} = 0.5 \times (Q_{p20} + Q_{B2})$$

$$Q'_{p30} = 0.5 \times (Q_{p21} + Q_{p33})$$

を G_1, G_2, G_3 の Q_{B1}, Q_{B2}, Q_{B3} へ代入して γ_p のオ1近似値を求め、次に Q_p のオ1近似値を求め、この操作を繰返して近似をすすめていく。6に述べる数値計算例はこの方式による。

5 境界条件

(1) 上流端条件

上流端では η 又は Q が与えられるが (1)(2)式を同時に成立させることは困難なので、特性曲線表示の式を用いて計算することが行われるが、余り良い結果がえられなかった。上流端又断面について連続の式のみを満足する条件で決定できる。

(2) 下流端条件

一般に洪水計算では河川の間におけるある長さにあたって考える事が多いので、固有の水位、流量を与えずに決定する方法を工夫した。中が一樣の断面では、下流端又断面で洪水が波形を変えず伝播するものとすれば $\partial h / \partial x = 0$ より、最下流端断面の水位を上流断面の水位より求めることができる。変断面の水路においては、最下流端に等断面の区間を仮定して同様の操作をすれば水位を求めることができる。

6 洪水追跡の数値計算例

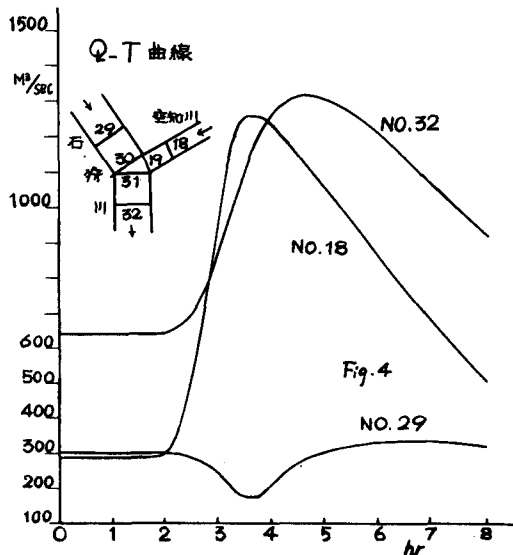
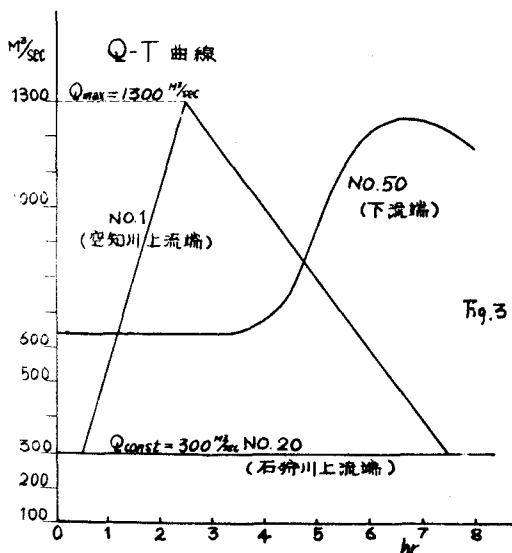
石狩川、空知川の合流点附近約50kmに50断面をモデルとしてとりだし 次のような条件で数値計算を行った。

石狩川 川巾 280m 粗度係数 0.0272 勾配 0.000476

空知川 川巾 140m 粗度係数 0.0224 勾配 0.00125

格子間隔は安定条件を考慮して $\Delta t = 120 \text{ sec}$ $\Delta x = 1000 \text{ m}$ とした。上流端で与えられた流量は Fig.3 のとおりで、合流点附近の NO.18, NO.29, NO.32 の T-Q 曲線を Fig.4 に示すが、石狩川上流部では、せき上げの影響で一時的に流量がへり、合流点での河道貯留が観察される。

計算には北大計算センターの HIPAC 103 を利用した。



参考文献 技術資料 20号 土木学会北海道支部

岸力、板倉忠興、村田茂昭、小山田博：Digital Computerによる豊潮河川の流れの計算