Ⅱ－2 水位流量曲線の作成に関する統計的考察

中央大学理工学部　正会員　春日屋　伸昌

水位流量曲線の方程式は，一般に，次の形に書かれる．

$$Q=C(H+z)^m \qquad (1)$$

ここに，Qは流量，Hは水位，C，z，mは定数である．これら３つの定数を，与えられたn個の測定値(H_i, Q_i)［$i=1, 2, \cdots, n$］から最小２乗法によって決定する場合，従来は（１）の両辺の対数を取って$\log Q$の残差の２乗を最小にするという便法を採用してきたが，これは理論的には厳密な方法といい難く，またその際に，n個の測定値(H_i, Q_i)の精度について，水位の測定値H_iには誤差がなく，流量の測定値Q_iだけに誤差が生じ，しかもQ_iの精度はその大きさに無関係に一定であるとの仮定を立てていたが，これらの点については検討を要すると思われる．厳密に最小２乗法を適用するには，測定値H_iとQ_iとのそれぞれの残差の重みつき平方の和を最小にしなければならない．そのためには，考えている地点で水位と流量との測定の精度を種々な水位についての実測に基づいて定めなければならない．このとき，水位の測定値の分散は水位の大小に無関係に一定であり，しかも流量の測定値の分散にくらべて無視しうるほど小さいと仮定してもさしつかえないであろう．ところで，流量の測定の精度は流量が大きくなるほど低下する．すなわち，流量が増大するにつれて，一般に水面幅が増大し，流速計を用いて縦平均流速を算定すべき垂直線数が増し，それに伴なって流量の精度が低下する．殊に高水量に対して竿浮子を用いる場合の精度について著しい．したがって，低水量と高水量との測定値の精度を同一と考えることは実情に即しない．なお，流量Q_iの大きさとその測定値の重みp_iとの関係は，実測から定められるが，ここでは一般に，p_iはQ_i^r $(r>0)$に反比例すると仮定する．

まず，C，z，mの近似値をそれぞれC_0，z_0，m_0とし，これらを定める方法を考える．$H-Q$直交座標系に関して，n個の測定点(H_i, Q_i)を打点し，これら諸点を通過する滑らかな曲線を描き，水位H_Iに対する流量をQ_I，水位$H_I+\Delta H$に対する流量をQ_{II}，水位$H_I+2\Delta H$に対する流量をQ_{III}として，これらをグラフ上から定める．このとき，Q_I，Q_{III}がグラフの両端に近く取られるように，H_IおよびΔHを選ぶのがよい．そうすると，近似的に次の３つの式が成り立つ．

$$Q_I = C_0(H_I+z_0)^{m_0} \qquad (2)$$

$$Q_{II} = C_0(H_I+\Delta H+z_0)^{m_0} \qquad (3)$$

$$Q_{III} = C_0(H_I+2\Delta H+z_0)^{m_0} \qquad (4)$$

あるいは，

$$(Q_I/C_0)^{1/m_0} = H_I+z_0 \qquad (2')$$

$$(Q_{II}/C_0)^{1/m_0} = H_I+\Delta H+z_0 \qquad (3')$$

$$(Q_{III}/C_0)^{1/m_0} = H_I+2\Delta H+z_0 \qquad (4')$$

$(3')-(2')=(4')-(3')$ であるから，けっきょく，次の式がえられる．

$$2(Q_{II}/Q_{III})^{1/m_0}-(Q_I/Q_{III})^{1/m_0}=1 \qquad (5)$$

そこで，m_0をパラメーターとしてQ_{II}/Q_{III} と Q_I/Q_{III} との関係を表わすグラフを作っておけば，

容易にm_0を求めることができる．つぎに，（2′）÷（4′）より，C_0を消去してz_0を求めれば，

$$z_0 = 2(Q_I/Q_{III})^{1/m_0}\Delta H / \{1-(Q_I/Q_{III})^{1/m_0}\} - H_I \qquad (6)$$

最後に，C_0は（2），（3），（4）のいずれからでも容易に求められる．

さて，近似値C_0，z_0，m_0が定められれば，

$$C = C_0 - \Delta C,\ z = z_0 - \Delta z,\ m = m_0 - \Delta m;\ \tilde{Q}_i = Q_i - v_i\ [i = 1, 2, \cdots, n] \qquad (7)$$

とおく．ここに，$\tilde{Q}_i$は測定値Q_iに対する真値，v_iはQ_iの誤差である．そこで，

$$f_i(\tilde{Q}_i; C, z, m) \equiv \tilde{Q}_i - C(\tilde{H}_i + z)^m = 0 \quad [i = 1, 2, \cdots, n] \qquad (8)$$

の左辺を補正量ΔC，Δz，Δm；v_iについて線型化する．$\tilde{H}_i$は測定値H_iに対する真値であるが，測定値H_iに誤差はないとしているので，$\tilde{H}_i = H_i$である．（8）は，テーラー展開によって，

$$\begin{aligned}
&f_i(\tilde{Q}_i; C, z, m) = f_i(Q_i - v_i; C_0 - \Delta C, z_0 - \Delta z, m_0 - \Delta m)\\
&= f_i(Q_i; C_0, z_0, m_0) - (\partial f/\partial Q)_0 v_i - (\partial f/\partial C)_0 \Delta C - (\partial f/\partial z)_0 \Delta z - (\partial f/\partial m)_0 \Delta m\\
&= Q_i - C_0(H_i+z_0)^{m_0} - v_i + (H_i+z_0)^{m_0}\Delta C + C_0 m_0 (H_i+z_0)^{m_0-1}\Delta z + [C_0(H_i+z_0)^{m_0}\ln(H_i+z_0)]\Delta m\\
&= 0 \quad [i = 1, 2, \cdots, n]
\end{aligned} \qquad (9)$$

そこで，（9）の条件のもとで，v_iの重みつき平方$p_i v_i^2$の和を最小とするように，ΔC，Δz，Δmを定めればよい．したがって，未定係数λ_iを用い，次の関数gの無条件極小を求める．

$$g \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} v_i^2/Q_i^r + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i \qquad (10)$$

$$\therefore\ \partial g/\partial v_i = v_i/Q_i^r - \lambda_i = 0 \text{ より，}\quad v_i = \lambda_i Q_i^r\ [i = 1, 2, \cdots, n]. \qquad (11)$$

$$\partial g/\partial \Delta C = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(H_i+z_0)^{m_0} = 0 \text{ より，} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(H_i+z_0)^{m_0} = 0. \qquad (12)$$

$$\partial g/\partial \Delta z = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_0 m_0 (H_i+z_0)^{m_0-1} = 0 \text{ より，} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(H_i+z_0)^{m_0-1} = 0. \qquad (13)$$

$$\partial g/\partial \Delta m = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_0 (H_i+z_0)^{m_0}\ln(H_i+z_0) = 0 \text{ より，} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(H_i+z_0)^{m_0}\ln(H_i+z_0) = 0. \qquad (14)$$

（11）を（9）に入れてλ_iを求め，これを（12）～（14）に入れると，ΔC，Δz，Δmを求めるための連立方程式が次のように求められる．ここに，$\eta_i \equiv H_i + z_0$であり，$[\eta^{2m_0}/Q^r] = \sum_{i=1}^{n}\eta_i^{2m_0}/Q_i^r$を表わす（その他も同様）．

$$\left.\begin{aligned}
&[\eta^{2m_0}/Q^r]\Delta C + C_0 m_0[\eta^{2m_0-1}/Q^r]\Delta z + C_0[\eta^{2m_0}\ln\eta/Q^r]\Delta m\\
&\qquad = C_0[\eta^{2m_0}/Q^r] - [\eta^{m_0}/Q^{r-1}]\\
&[\eta^{2m_0}/Q^r]\Delta C + C_0 m_0[\eta^{2m_0-2}/Q^r]\Delta z + C_0[\eta^{2m_0-1}\ln\eta/Q^r]\Delta m\\
&\qquad = C_0[\eta^{2m_0-1}/Q^r] - [\eta^{m_0-1}/Q^{r-1}]\\
&[\eta^{2m_0}\ln\eta/Q^r]\Delta C + C_0 m_0[\eta^{2m_0-1}\ln\eta/Q^r]\Delta z + C_0[\eta^{2m_0}\ln^2\eta/Q^r]\Delta m\\
&\qquad = C_0[\eta^{2m_0}\ln\eta/Q^r] - [\eta^{m_0}\ln\eta/Q^{r-1}]
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

（15）を解いてΔC，Δz，Δmを求めれば，（7）からC，z，mが定められる．

ところで，rの値は実測によって定められるべきであるが，流量に対する測定の重みp_iが流量Q_iに反比例する，すなわち，$r = 1$と仮定しても，かなり修正された結果が期待される．この仮定のもとで（15）に既往の資料を当てはめた結果によると，特に高水量に対して，従来の方法によってえられる値と数パーセント異なった値のえられることがわかった．