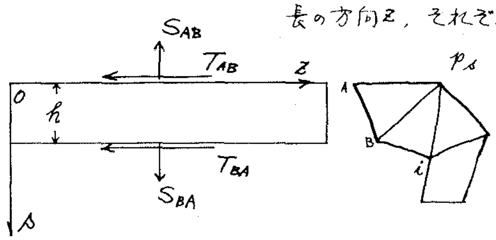
I−102 ポリゴン断面を有する桁の応力解析*

室蘭工業大学土木工学科　正員　能町純雄

1. はしがき　薄肉断面の桁の応力解析は曲げ理論と曲げ捩り理論によって立体的に解析することができる。これについては多くの研究がなされているが，大別して捩り角のみに注目するワグナー以来の考え方と，捩り角とウオピングをそれぞれ独立な函数と考えて解析するベンスコーター等の理論がある，後者の方が前者よりは精密と考られる。*いずれにも美しい理論体系を得るために，断面のウオーピングはサン，ヴェナンの捩れのウオーピングを基本とし剪断中心を用いて理論を展開することには変りがない。ここでは見方を変えて，普通この種構造の断面は直線の集りからできていることに注目しよう。また曲線の集りであっても直線の要素に解いて考えることができる。換言すると，ラーメンやトラスが直線部材の集合である如く，薄肉断面桁を細長い矩形梁の集合とみなす。

2. 変位，剪断方程式　構成された断面の一部材を取り出す。図−1，深さの方向 s，軸長の方向 z，それぞれの変位を w, u とし，s, z 方向の法線断面力を p_s, p_z，剪断流を q とすると，



図−1.

$$\frac{\partial p_s}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \qquad (2)$$

また　$p_z = tEU'$　(3)　t は厚さである。

$$q = tG\left(\frac{\partial u}{\partial s} + w'\right) \qquad (4)$$

但し　$U' = \frac{\partial U}{\partial z}$，$w' = \frac{\partial w}{\partial z}$ を示す。

ここで U について平面保持則を採用して

$$u = U_A\left(1 - \frac{s}{h}\right) + U_B\frac{s}{h} \qquad (5)$$

とおくと (2) 式は (3), (5) より

$$q = T_{AB} - EU_A''t\left(s - \frac{s^2}{2h}\right) - EU_B''t\frac{s^2}{2h} \qquad (6)$$

また $s = h$ で $q = -T_{BA}$ とすると　$T_{AB} + T_{BA} = \frac{Eth}{2}(U_A'' + U_B'')$　(7)

(6) を (1) に代入して s について積分すると

$$p_s = -T_{AB}'s + EU_A'''t\left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{6h}\right) + EU_B'''t\frac{s^3}{6h} + S_{AB}, \qquad (8)$$

次に $s = h$ で $p_s = S_{BA}$ とすると

$$T_{AB}' = \frac{EU_A'''}{3}ht + \frac{EU_B'''}{6}ht + \frac{(S_{AB} - S_{BA})}{h}, \qquad (9)$$

$$T_{BA}' = \frac{EU_B'''}{3}ht + \frac{EU_A'''}{6}ht + \frac{(S_{BA} - S_{AB})}{h}, \qquad (10)$$

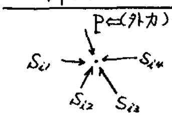
上式を z で一度積分すると端面の剪断 T_{AB}，T_{BA} と同水平変位等との関係を示す，2式を得る次の如し。

$$T_{AB} = \frac{Eht}{6}(2U_A'' + U_B'') + \frac{(\bar{S}_{AB} - \bar{S}_{BA})}{h} + T^*_{AB}, \quad (11)$$

$$T_{BA} = \frac{Eht}{6}(2U_B'' + U_A'') + \frac{(\bar{S}_{BA} - \bar{S}_{AB})}{h} + T^*_{AB}, \quad (12)$$

上式中 U_A'', U_B'' は A, B 端面の水平変位の2次微分 $\bar{S}_{AB}$, $\bar{S}_{BA}$, は A, B 端面に作用する鉛直力による剪断で節点に作用する外力と釣合う, T^*_{AB} は閉断面の部材のみに現われるものでサン・ヴナンの剪断流である。ラーメンにおける撓角撓度公式に相当する。これを変位剪断方程式と仮称することにする。

3. 節点釣合方程式



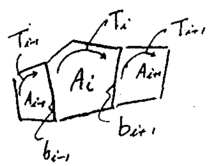
(a) 剪断流理論により一節点 i に集るTの総和は0である。

$\sum T_i = 0$, 節点の数が m ならば m 個の式がある。

(b) 一節点に集るSなる端面力は, 節点の外力も加えて,

$\sum V = 0$, $\sum H = 0$, 2m 個の式がある。

(※閉断面においては一節点に集る力の釣合に端モーメントと深さの方向と直角な向きの剪断を考慮する。開断面のときはこの影響は小さいので無視する。)



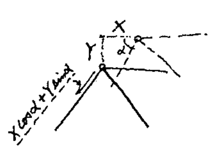
(c) 閉断面の場合は, 一閉区画毎に剪断応力について積分するとSによる項は0となり T^* の項だけ残る。

$$\oint_i G\left(w' + \frac{\partial u}{\partial s}\right) ds = G A_i \theta = -T_{i-1} b_{i-1} + T_i l_i + T_{i+1} b_{i+1}, \quad (13)$$

但し A_i は i 番目の閉区画の面積, l_i は周長, b_{i-1}, b_{i+1} は相隣る閉区間との共通隔壁長 T_i は i 区間に流れるサンヴナン剪断流, T_i の数だけ方程式ができるので (11), (12) の T^* は θ の関数として直ちに与えられる。

4, 節点の適合条件

(a) 各節点のZ方向変位 U_i これは (11). (12) 式に m 個の未知数として存在する。



(b). S は部材の数が n 個あればその両端面にあり 2n 個の未知数を形成している。いま部材の両端の深さの方向(s の方向)の変位 w に注目すると一節点に集る部材の w は, その節点の変位成分 X, Y で表わすことができる。即ち 2n 個の未知数を 2m 個に置換できる。従って 2n 個の w の間に 2n−2r 個の関係式を作ることができる。いま

$$G w'_{AB} + G(U_B - U_A)/h = \frac{Eht}{6}(2U_A'' + U_B'') + \frac{(\bar{S}_{AB} - \bar{S}_{BA})}{h} + T^*_{AB}, \quad (14)$$

を利用するとSに関する 2n−2m 個の方程式を得る。この方程式と(b)の釣合方程式 2m で S の数 2n に対して 2n の式があり, n 個の U_i に対して n 個の $\sum T = 0$ があり (11), (12) 式中の U, S は, 与えられた外力と T^* で表わされる。なお T^* 中にある θ については, 任意の2個の W と θ の関係式を求めるか, Benscoter の式

$$G\int t_0 r_t \frac{\partial u}{\partial s} ds + G\int t_0 r_t w' ds = M_z, \quad (15)$$

を利用して θ を消去して計算できる。